7. Vorlesung Statistik I
Intervallschätzung I

Wdh.: Punktschätzung und Intervallschätzung

- Ziel der Parameterschätzung: Auf der Basis einer einfachen Zufallsstichprobe eine Aussage darüber treffen, welchen konkreten Wert ein Parameter hat.

- Man unterscheidet in der Parameterschätzung zwischen
  - Punktschätzung und
  - Intervallschätzung

- **Punktschätzung**:
  - Ergebnis einer Punktschätzung ist eine konkrete Zahl.
  - Beispiel: Wir gehen auf Basis unserer Stichprobe davon aus, dass der Parameter π gleich 0.45 ist.

- **Intervallschätzung**
  - Ergebnis einer Intervallschätzung ist ein Intervall von Zahlen.
  - Beispiel: Wir gehen auf Basis unserer Stichprobe davon aus, dass der Parameter μ im Bereich zwischen 101 und 108 liegt.

Motivation

Motivation Intervallschätzung I

- Das Resultat einer Punktschätzung – der Schätzwert für den unbekannten Parameter - ist ein konkreter Wert.
- Dieser Schätzwert wird eigentlich nie dem wahren Parameterwert entsprechen.
- Wenn wir einfach nur den Schätzwert betrachten, wissen wir nicht, wie genau diese Schätzung ist und wie sehr wir ihr vertrauen sollten.
- Beispielsweise lässt sich am Schätzwert alleine nicht ablesen, ob ihm eine Stichprobe von n = 10 oder n = 10000 Personen zugrunde liegt.
- Wir benötigen also zusätzliche Methoden, die die Genauigkeit bzw. Ungenauigkeit der Parameterschätzung berücksichtigen.

Motivation Intervallschätzung II

- Als Maß für die Präzision einer Schätzfunktion $\hat{\theta}$ hatten wir den Standardfehler kennengelernt:

$$SE(\hat{\theta}) = SD(\hat{\theta})$$

- Daher erste Idee: Einfach neben dem Schätzwert $\hat{\theta}_{Wert}$ zusätzlich den Standardfehler $SE(\hat{\theta})$ der Schätzfunktion angeben:
  - Hoher Standardfehler: Geringe Genauigkeit.
  - Niedriger Standardfehler: Hohe Genauigkeit.

- Bemerkung: Falls wir eine effiziente Schätzfunktion verwenden, wissen wir zwar, dass diese Schätzfunktion unter allen erwartungstreuen Schätzfunktionen - also relativ gesehen - den geringsten Standardfehler aufweist. Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass der Standardfehler einer effizienten Schätzfunktion auch absolut gesehen niedrig ist. Die absolute Höhe des Standardfehlers hängt nämlich unter anderem auch von der Stichprobengröße n ab (siehe auch nächste Folie).

Motivation Intervallschätzung III

- Problem: Der Standardfehler hängt in den meisten Fällen von dem unbekannten Parameter selbst oder einem anderen unbekannten Parameter ab:
  - Standardfehler der Schätzfunktion $\bar{X}$ für π :

$$SE(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

  - Standardfehler der Schätzfunktion $\bar{X}$ für μ:

$$SE(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Motivation Intervallschätzung IV

- Das heißt: Wir können den Standardfehler in den meisten Fällen gar nicht berechnen.

- Mögliche Lösung: Angabe eines Schätzwerts für den Standardfehler:

  - Also z.B.

$$\sqrt{\frac{\hat{\pi}_{Wert}(1-\hat{\pi}_{Wert})}{n}}$$

statt

$$\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

- Allerdings hätten wir das Problem dadurch nur verschoben, da natürlich auch die Schätzung des Standardfehlers nur eine Punktschätzung ist und wir nicht wissen, wie genau diese ist.

- Darüber hinaus ist die Interpretation des Standardfehlers nicht sehr intuitiv!

Motivation Intervallschätzung V

- Weitere Möglichkeit: Ausdrücken der Genauigkeit der Schätzung durch die Angabe eines Intervalls, das die auf der Basis der Stichprobe plausiblen Werte für den Parameter enthält.

- Deshalb**: Intervallschätzung**

- Im Folgenden sei wieder θ ein beliebiger Parameter.

Intervalle

- Zunächst: Was ist ein Intervall?
  - Ein Intervall wird durch eine Untergrenze u und eine Obergrenze o festgelegt.
  - Notation: $[u, o]$
  - Es enthält alle reellen Zahlen, die größer oder gleich u sind und kleiner oder gleich o.

Ziel der Intervallschätzung

- Wir wollen nun auf Basis der Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus unserer einfachen Zufallsstichprobe ein **Intervall** $I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [u, o]$ bestimmen, dass die auf der Basis der Stichprobe plausiblen Werte für den Parameter θ enthält.

- Die Länge dieses Intervalls sollte hierbei die Genauigkeit unserer Schätzung widerspiegeln:

  - Kleines Intervall – wenige Werte sind plausibel – hohe Genauigkeit

  - Großes Intervall – viele Werte sind plausibel - geringe Genauigkeit

Erste Idee

- Da wir die Information aus unserer Stichprobe nutzen wollen, sollten die Untergrenze u und die Obergrenze o von den Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen.

- Naive Idee: Wir verwenden einfach einen geeigneten Schätzwert $\hat{\theta}_{Wert}$ für θ und ziehen irgendeine reelle Zahl *c* von diesem ab, um die Untergrenze unseres Intervalls zu erhalten, und addieren dieselbe Zahl *c*, um die Obergrenze zu erhalten:

$$u = \hat{\theta}_{Wert} - c$$

$$o = \hat{\theta}_{Wert} + c$$

$$I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [u, o\,] = \left[\hat{\theta}_{Wert} - c, \hat{\theta}_{Wert} + c\right]$$

- Beispiel: Als Schätzwert für μ hat sich $\hat{\mu}_{Wert} = 110$ ergeben. Wir wählen *c* = 10 und erhalten:

$$I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [110 - 10, 110 + 10] = [100{,}120]$$

- Wie kommen wir auf c = 10? Warum nicht c = 11? Wie können wir beurteilen, ob sich dieses Intervall zur Schätzung von μ eignet?

Zufallsstichproben und Intervalle I

- Wünschenswert wäre, dass das von uns berechnete Intervall $I(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den wahren Parameterwert θ enthält, d.h. wir hätten gerne, dass $\theta \in [u, o]$ bzw. $u \leq \theta \leq o$ gilt.

- Wie können wir feststellen, ob dies der Fall ist?

- Antwort: Für eine einzelne Stichprobe können wir dies leider nicht.

- Um zu bestimmen, ob ein einzelnes Intervall den wahren Parameterwert überdeckt, müssten wir ja den wahren Parameterwert schon kennen.

- Aber: Da die Ziehung der einfachen Zufallsstichprobe ein Zufallsexperiment ist, können wir uns anschauen, wie sich die Intervalle **verhalten würden**, **falls wir wiederholt** eine solche einfache Zufallsstichprobe ziehen und die Intervalle berechnen würden.

- Wir können auf diese Art und Weise herausfinden, wie oft unsere Intervalle „im Durchschnitt“ den wahren Parameterwert enthalten.

Zufallsstichproben und Intervalle II

- Jedes Mal, wenn wir eine einfache Zufallsstichprobe der Größe n aus der Population ziehen würden, würden andere Personen in unsere Stichprobe gelangen.

- Daher ergäben sich auch jedes Mal andere Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- Da wir die Intervalle aus den Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berechnen, erhielten wir auch jedes Mal andere Intervalle.

- Die Intervalle unterliegen also Zufallsschwankungen.

- Diese Zufälligkeit der Intervalle können wir wieder mithilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie beschreiben.

- Hieraus werden sich dann Gütekriterien für die Intervallschätzung ergeben.

Zufällige Intervalle

- Das Ziehen einer einfachen Zufallsstichprobe ist ein Zufallsexperiment.
- Das Ergebnis dieses Zufallsexperiments ist eine Stichprobe von n Personen.
- Ein konkretes Intervall besteht aus einer konkreten Untergrenze u und einer konkreten Obergrenze o und kann für jede Stichprobe aus den Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der iid Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berechnet werden.
- Wir können also zwei Zufallsvariablen *U* und *O* definieren, die jedem möglichen Ergebnis des Zufallsexperiments – also jeder möglichen Stichprobe – jeweils die aus ihr berechnete Untergrenze u und Obergrenze o des Intervalls zuordnen.
- Hierdurch erhalten wir ein **zufälliges Intervall $\boldsymbol{I(X_1, X_2, \ldots, X_n) = [U, O]}$, dessen Grenzen die Zufallsvariablen U und O sind**.
- In der Stichprobe berechnen wir ein **konkretes Intervall $\boldsymbol{I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [u, o]}$, dessen Grenzen die Realisationen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{o}$ der Zufallsvariablen U und O sind**.
- Die Unterscheidung zwischen zufälligem und konkretem Intervall ist analog zur Unterscheidung zwischen Schätzfunktion und Schätzwert in der Punktschätzung.

Vorgehen Punktschätzung (Wdh.)

- Im Rahmen der **Punktschätzung**
  - betrachten wir die Zufallsvariable $\hat{\theta}$, deren Realisation der Schätzwert $\hat{\theta}_{Wert}$ ist. Diese Zufallsvariable ist unsere Schätzfunktion.
  - formulieren wir mithilfe der Eigenschaften der Schätzfunktion (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung/-fehler) Gütekriterien, um beurteilen zu können, ob eine bestimmte Schätzfunktion geeignet ist.
  - würde bei (gedanklich!) wiederholter Ziehung der einfachen Zufallsstichprobe jedes Mal ein anderer Schätzwert $\hat{\theta}_{Wert}$ resultieren.
  - berechnen wir auf Basis der Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in unserer Stichprobe **einen** Schätzwert $\hat{\theta}_{Wert}$ für den Parameter θ.

Vorgehen Intervallschätzung

- Im Rahmen der **Intervallschätzung**
  - betrachten wir die Zufallsvariablen *U* und *O*, deren Realisationen u und o sind.
  - formulieren wir mithilfe der Eigenschaften der Zufallsvariablen *U* und *O* Gütekriterien, um beurteilen zu können, ob ein bestimmtes Intervall geeignet ist.
  - würde bei (gedanklich!) wiederholter Ziehung der einfachen Zufallsstichprobe jedes Mal eine andere Untergrenze u und eine andere Obergrenze o und daher ein anderes Intervall $[u, o]$ resultieren.
  - berechnen wir auf Basis der Realisationen x_1, x_2, …, x_n in unserer Stichprobe **eine** Untergrenze u und eine Obergrenze o eines Intervalls $[u, o]$.

Zwischengliederung

- Bislang:
  - Motivation und Grundlagen der Intervallschätzung

- Jetzt:
  - Konfidenzintervalle und Gütekriterien

Konfidenzintervalle

Gütekriterien für Intervalle

- Hohes Konfidenzniveau
- Minimale erwartete Länge

Konfidenzniveau I

- Gegeben sei eine einfache Zufallsstichprobe und Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung von einem unbekannten Parameter θ abhängt.

- Sei zudem α eine reelle Zahl zwischen 0 und 1.

- Man bezeichnet das **zufällige** Intervall $I(X_1, \dots, X_n) = [U, O]$ als **Konfidenzintervall** (kurz: **KI**) für θ zum **Konfidenzniveau** $1 - \alpha$, falls

$$P\big(\theta \in I(X_1, \dots, X_n)\big) = P(U \leq \theta \leq O) = 1 - \alpha$$

- In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Intervall $I(X_1, \dots, X_n)$ mit seinen zufälligen Grenzen *U* und *O* den wahren Wert des Parameters θ enthält, ist gleich $1 - \alpha$.

- Die Realisation $I(x_1, \dots, x_n) = [u, o]$ eines Konfidenzintervalls $I(X_1, \dots, X_n) = [U, O]$ ist ein **konkretes Konfidenzintervall**.

Konfidenzniveau II

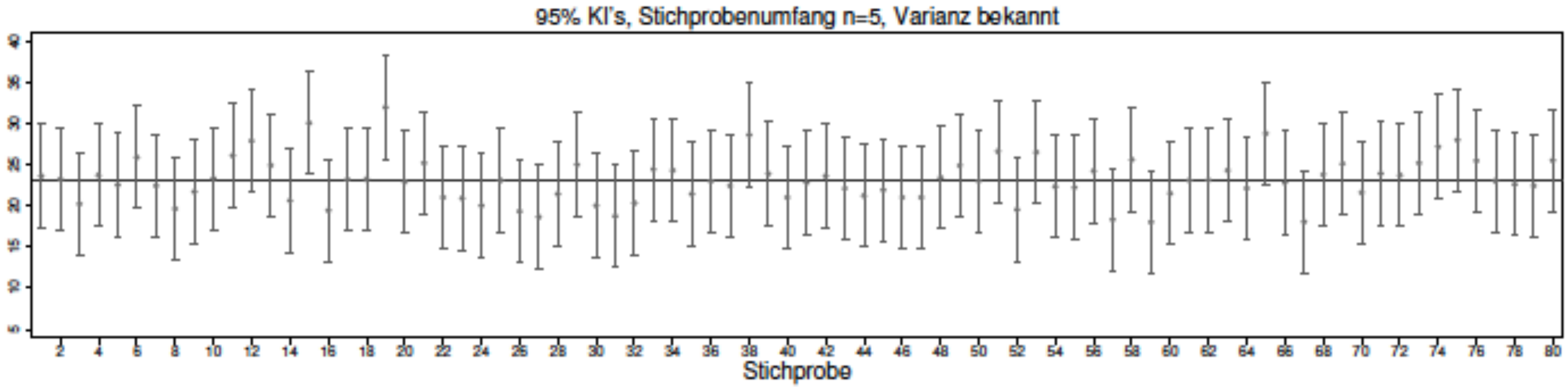
- Was bedeutet die Eigenschaft $P(U \leq \theta \leq O) = 1 - \alpha$ eines Konfidenzintervalls?
- Wir erinnern uns an die frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses entspricht der relativen Häufigkeit dieses Ereignisses, falls man das Zufallsexperiment unendlich oft durchführt.
- Das Zufallsexperiment ist in diesem Fall das Ziehen einer einfachen Zufallsstichprobe.
- Das Ereignis $U \leq \theta \leq O$ ist das Ereignis, dass das von uns in der Stichprobe berechnete konkrete Konfidenzintervall den wahren Parameterwert θ enthält.
- Das heißt: Würden wir unendlich oft eine einfache Zufallsstichprobe ziehen und in jeder dieser Stichproben das konkrete Konfidenzintervall berechnen, enthalten $100 \cdot (1 - \alpha)$ Prozent dieser konkreten Konfidenzintervalle den wahren Parameterwert θ.
- Offensichtlich sollte das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ also hoch sein.

Konfidenzniveau III

- Falls das Konfidenzniveau z.B. $1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ beträgt, enthielten bei unendlich häufiger Ziehung der einfachen Zufallsstichprobe 95% der in diesen Stichproben berechneten konkreten Konfidenzintervalle den wahren Parameterwert.

- Ob das einzelne in unserer Stichprobe berechnete Konfidenzintervall den wahren Wert enthält, wissen wir nicht.

- Illustration: Konfidenzintervalle mit Konfidenzniveau 0.95 für 80 mit dem Computer generierte Stichproben bei einem wahren Parameterwert von $\theta\ = 23$:



Minimale erwartete Länge

- Ein hohes Konfidenzniveau reicht als alleiniges Gütekriterium nicht aus.

- Grund: Das triviale Intervall $[-\infty, \infty]$ hat stets ein Konfidenzniveau von 100% (und bietet dabei keinen Erkenntnisgewinn).

- Wir müssen also ein weiteres Gütekriterium formulieren, dass sich auf die erwartete Länge des Konfidenzintervalls bezieht.

- Die erwartete Länge eines Konfidenzintervalls $I(X_1, \dots, X_n) = [U, O]$ ist

$$E(O - U) = E(O) - E(U)$$

- Ein Konfidenzintervall mit Konfidenzniveau $1 - \alpha$ hat eine **minimale erwartete Länge**, falls es unter allen Konfidenzintervallen mit Konfidenzniveau $1 - \alpha$ die kleinste erwartete Länge aufweist.

Offene Frage

- Wie konstruiert man Konfidenzintervalle zu einem vorgegebenen Konfidenzniveau mit minimaler erwarteter Länge?

- Wir werden dies an zwei Fällen betrachten:

  - Konfidenzintervalle für den Parameter μ einer Normalverteilung.

  - Konfidenzintervalle für den Parameter π einer Bernoulli-Verteilung.

Zwischengliederung

- Bislang:
  - Motivation und Grundlagen der Intervallschätzung
  - Konfidenzintervalle und Gütekriterien

- Jetzt:
  - Konfidenzintervalle für den Parameter μ einer Normalverteilung

Konfidenzintervalle für den Parameter μ einer Normalverteilung

Ausblick

- Ausgangssituation: $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ für *i* = 1, 2, …, *n*

- Ziel: Konstruktion eines Konfidenzintervalls $I(X_1, \dots, X_n)$ mit Konfidenzniveau $1 - \alpha$ mit minimaler erwarteter Länge für den Parameter μ .

- Zunächst aber einige Vorbereitungen:

  - Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzfunktionen

  - z-Standardisierung von Schätzfunktionen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzfunktionen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzfunktionen

- Zur Erinnerung: Schätzfunktionen sind Zufallsvariablen.
- Sie haben wie jede Zufallsvariable einen Erwartungswert, eine Varianz und eine Standardabweichung.
- Mithilfe dieser haben wir die Gütekriterien für die Punktschätzung formuliert.
- Sie haben außerdem wie jede Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- Mithilfe dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung werden wir Konfidenzintervalle konstruieren.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{X}$ I

- Ausgangssituation: $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ für *i* = 1, 2, …, *n*

- Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass in diesem Fall

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

eine erwartungstreue, effiziente und konsistente Schätzfunktion für μ ist.

- Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\bar{X}}$ von $\bar{X}$?

Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{X}$ II

- Man kann zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass alle X_i unabhängig und normalverteilt sind, auch $\bar{X}$ normalverteilt ist (Beweis sehr schwierig).

- Den Erwartungswert und die Varianz von $\bar{X}$ haben wir bereits in der letzten Vorlesung bestimmt:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Damit ergibt sich:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{X}$ III

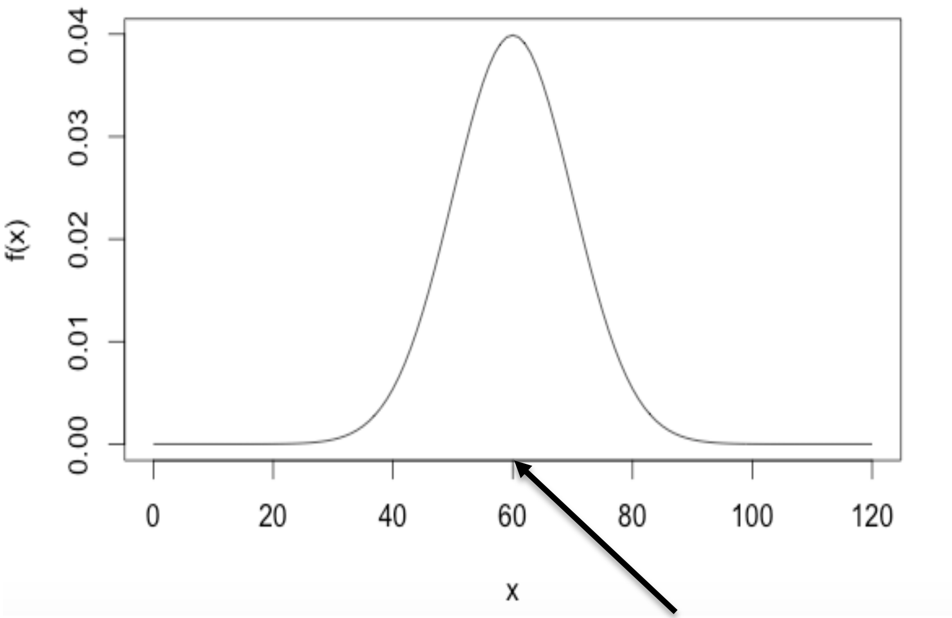
- Beispiel für $n = 1000$, $\mu = 60$ und $\sigma^2 = 100$:

$$E(X_i) = \mu = 60$$
$$Var(X_i) = \sigma^2 = 100$$

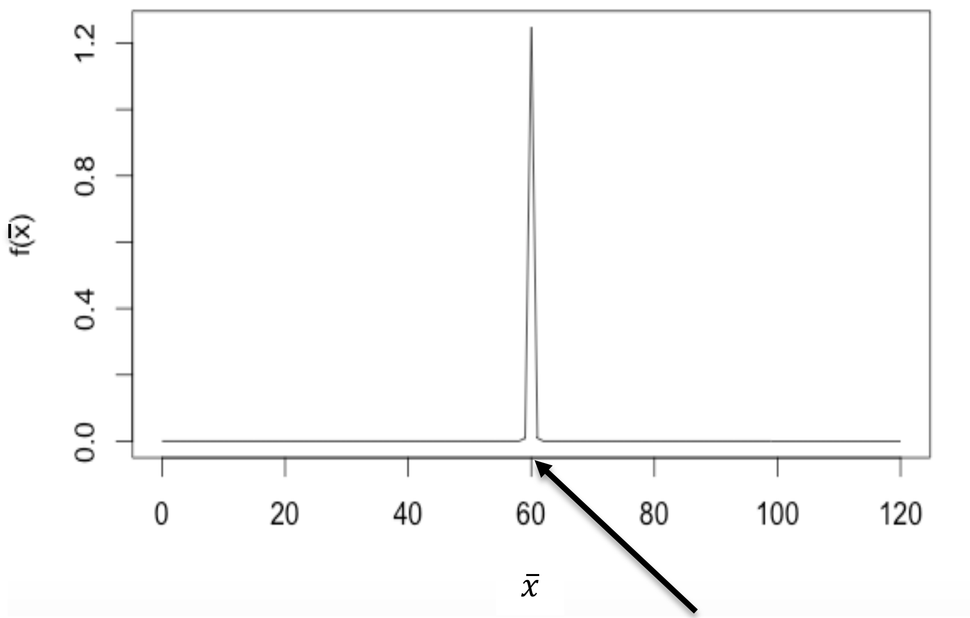
$$X_i \sim N(60, 100)$$

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu = 60$$
$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

$$\bar{X} \sim N\left(60, \frac{1}{10}\right)$$



$\mu = 60$



$\mu = 60$

z-Standardisierung von Schätzfunktionen

z-Standardisierung von Schätzfunktionen I

- Zur Erinnerung (nochmal): Schätzfunktionen sind Zufallsvariablen.
- Sie können wie jede Zufallsvariable z-standardisiert werden:

$$Z = \frac{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})}{SD(\hat{\theta})} = \frac{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})}{SE(\hat{\theta})}$$

- Wie für alle z-standardisierten Zufallsvariablen gilt dann $E(Z) = 0$ und $Var(Z) = 1$.
- Im konkreten Fall der Schätzfunktion $\bar{X}$ für μ ergibt sich wegen $E(\bar{X}) = \mu$

  und $SE(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{SE(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

z-Standardisierung von Schätzfunktionen II

- Da $\bar{X}$ normalverteilt ist (siehe Folie 32) und

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

einfach der z-Standardisierung von $\bar{X}$ entspricht, wissen wir (siehe Folie 72 in VL5), dass Z **standardnormalverteilt** ist:

$$Z \sim N(0, 1)$$

Konstruktion eines Konfidenzintervalls für μ (erster Versuch)

Intuition zur Konstruktionsstrategie

Nochmal zur Erinnerung:

- Bei einem Konfidenzintervall $I(X_1, \dots, X_n) = [U, O]$ für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ muss gelten, dass:

$$P(U \leq \mu \leq O) = 1 - \alpha$$

- In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Intervall $I(X_1, \dots, X_n)$ mit seinen zufälligen Grenzen U und O den wahren Wert des Parameters μ enthält, ist gleich $1 - \alpha$.

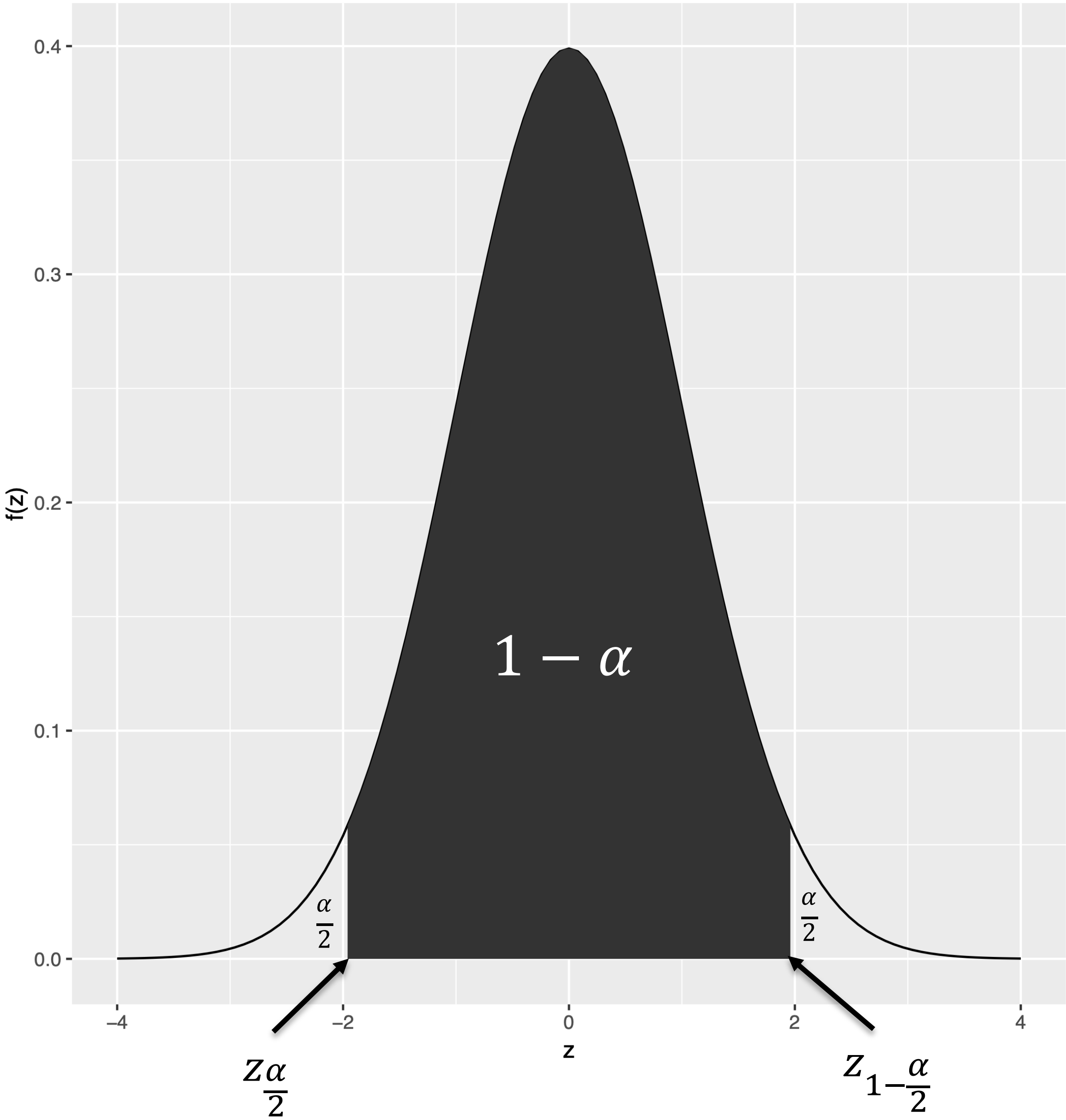
Konstruktionsstrategie des KIs:

- Auf den ersten Blick haben wir keine Ahnung, wie U und O genau aussehen sollen.

- Aber wir wissen, dass $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ gilt (siehe nächste Folien).

- Wir können diese Gleichung so lange umformen, bis ein Ausdruck wie $P(\cdots \leq \mu \leq \cdots) = 1 - \alpha$ dasteht und dann einfach U und O ablesen.

Quantile der Standardnormalverteilung I



Quantile der Standardnormalverteilung II

- Wir wissen also, das *Z* standardnormalverteilt ist und können mithilfe der Verteilungsfunktion *F* der Standardnormalverteilung diejenigen Werte $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bestimmen, für die jeweils $F(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ und $F(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ gilt.

- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ist das $\frac{\alpha}{2}$ - Quantil und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ - Quantil der Standardnormalverteilung.

Zur Erinnerung:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

- Dann gilt:

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Das heißt: Wir suchen uns diejenigen Werte $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ heraus, zwischen denen die Fläche unter der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung $1 - \alpha$ ist.

Quantile der Standardnormalverteilung III

- Bemerkung: Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung um Null ist

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$$

bzw.

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- Es reicht also eigentlich, wenn wir eines der beiden Quantile berechnen.

Quantile der Standardnormalverteilung IV

- Beispiel für die Berechnung:
- Wir wählen ein Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 0.95$
- In diesem Fall ist $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ und deshalb

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$$

- Daher ist $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975}$.
- Wir suchen also das 0.025 - Quantil $z_{0.025}$ und das 0.975 - Quantil $z_{0.975}$ der Standardnormalverteilung, d.h. die Werte $z_{0.025}$ und $z_{0.975}$, für die gilt:

$$F(z_{0.025}) = P(Z \leq z_{0.025}) = 0.025$$

$$F(z_{0.975}) = P(Z \leq z_{0.975}) = 0.975$$

Quantile der Standardnormalverteilung V

- Diese Werte können wir mithilfe der Funktion `qnorm` in R berechnen:

```
> qnorm(0.025, 0, 1)
[1] -1.959964

> qnorm(0.975, 0, 1)
[1] 1.959964
```

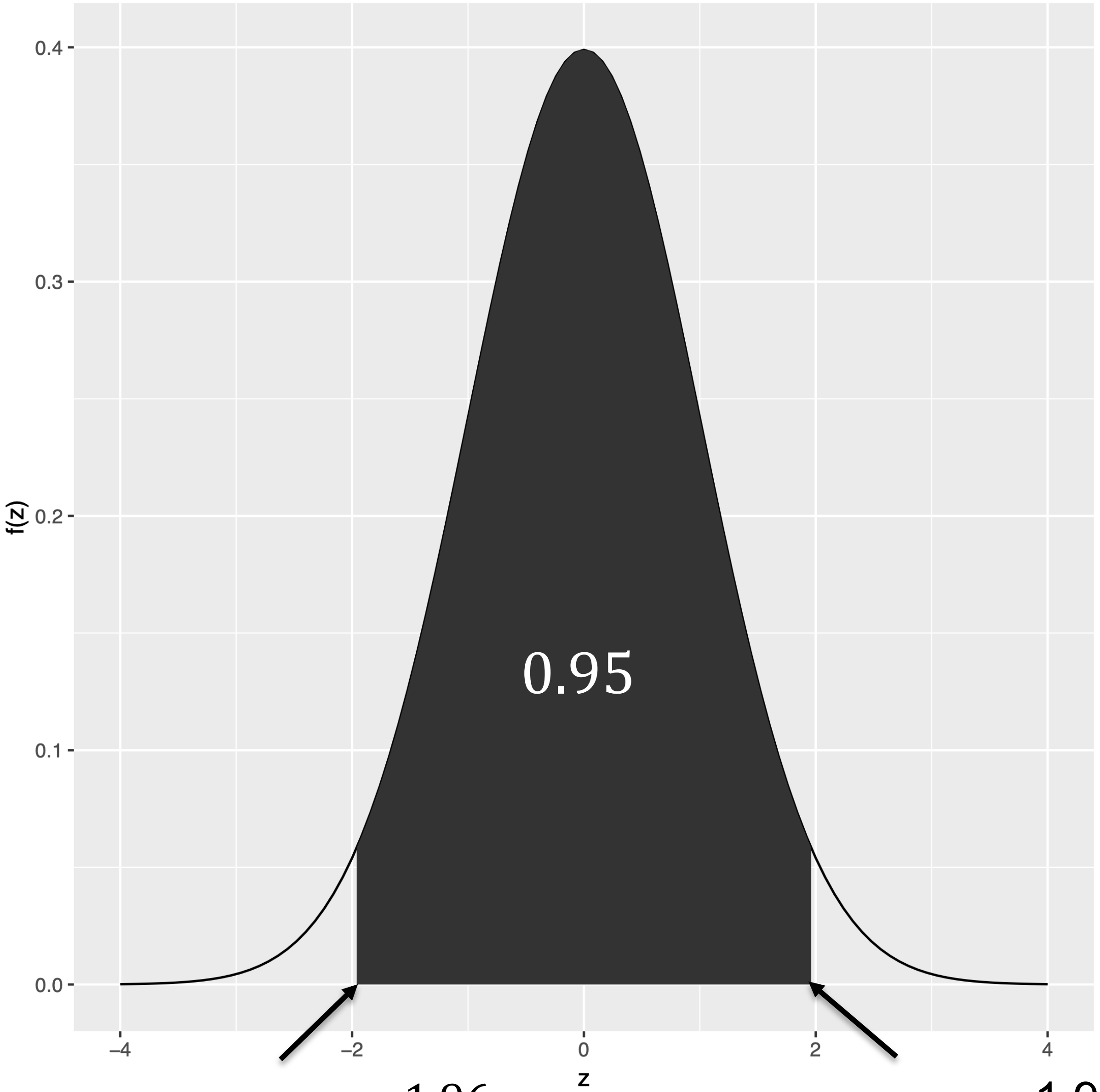
- Zur Kontrolle: Einsetzen dieser Werte in die Verteilungsfunktion *F* (`pnorm` in R):

```
> pnorm(-1.959964, 0, 1)
[1] 0.025

> pnorm(1.959964, 0, 1)
[1] 0.975
```

- Das heißt: $z_{0.025} \approx -1.96$ und $z_{0.975} \approx 1.96$

Quantile der Standardnormalverteilung VI



$z_{0.025} \approx -1.96$ $z_{0.975} \approx 1.96$

Quantile der Standardnormalverteilung VII

- Falls wir ein anderes Konfidenzniveau wählen, ergeben sich auch andere Quantile:
- Wir könnten z.B. auch ein etwas höheres Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 0.995$ wählen.
- In diesem Fall ist $\alpha = 1 - 0.995 = 0.005$ und deshalb

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.005}{2} = 0.0025$$
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.0025 = 0.9975$$

- Wir suchen also das 0.0025-Quantil $z_{0.0025}$ und das 0.9975-Quantil $z_{0.9975}$ der Standardnormalverteilung, d.h. die Werte $z_{0.0025}$ und $z_{0.9975}$, für die gilt:

$$F(z_{0.0025}) = P(Z \leq z_{0.0025}) = 0.0025$$
$$F(z_{0.9975}) = P(Z \leq z_{0.9975}) = 0.9975$$

Quantile der Standardnormalverteilung VIII

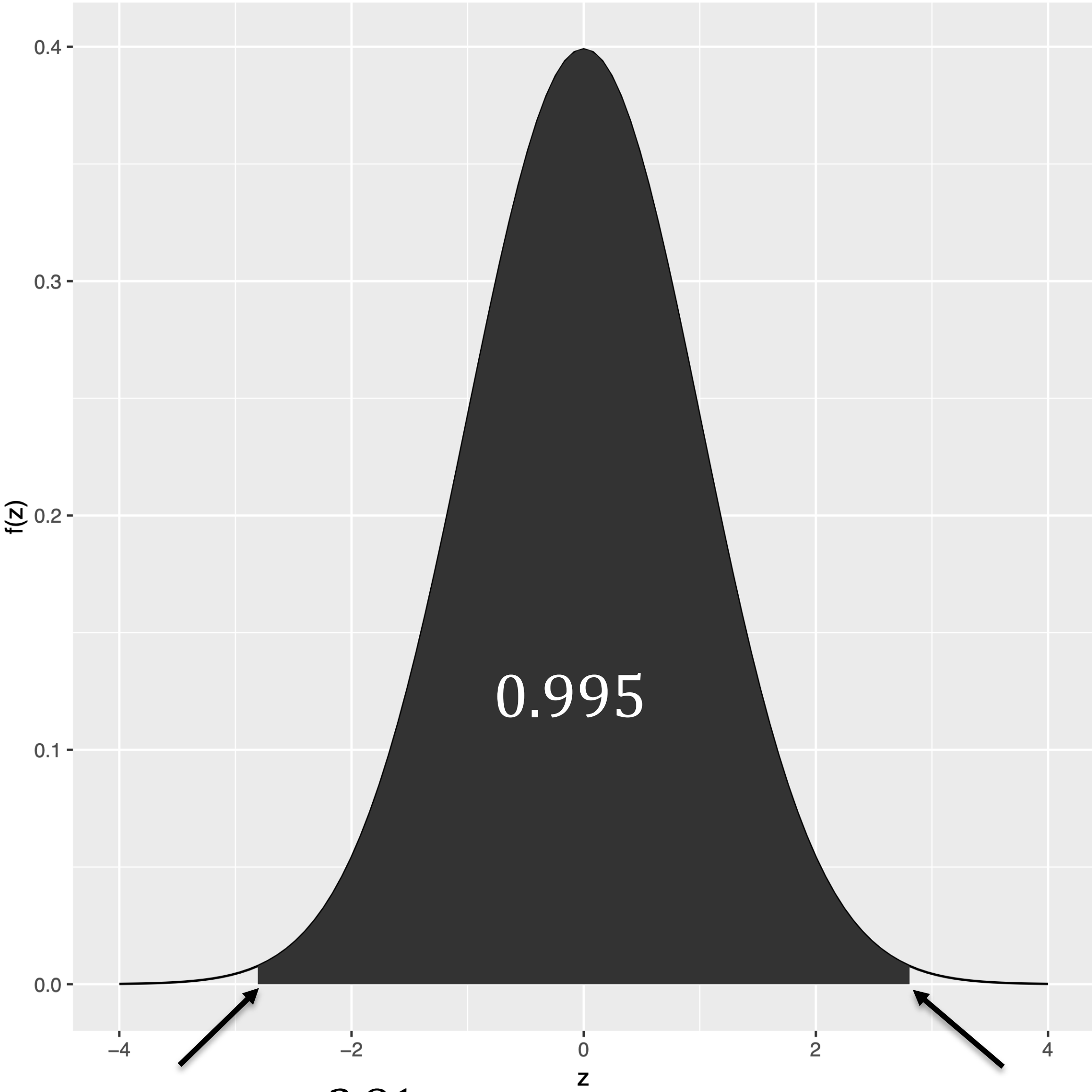
- Diese Werte können wir wieder mithilfe der Funktion `qnorm` in R berechnen:

```
> qnorm(0.0025, 0, 1)
[1] -2.807034

> qnorm(0.9975, 0, 1)
[1] 2.807034
```

- Das heißt, $z_{0.0025} \approx -2.81$ und $z_{0.9975} \approx 2.81$

Quantile der Standardnormalverteilung IX



$z_{0.0025} \approx -2.81$

$z_{0.9975} \approx 2.81$

Quantile der Standardnormalverteilung X

- Allgemein gilt:

- Je höher das gewünschte Konfidenzniveau $1-\alpha$, desto größer die Quantile $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ im Betrag.

Konstruktion des Konfidenzintervalls I

- Zusammenfassung bis jetzt:
- Wir wissen, dass

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

  standardnormalverteilt ist.

- Wir können deshalb die Quantile $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bestimmen, so dass

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

  gilt.

Exkurs: Konstruktion des Konfidenzintervalls II

- Einsetzen von

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

in $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ und Umstellen in die Form $P(U \leq \mu \leq O) = 1 - \alpha$:

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

(Einsetzen von *Z*)

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

(mal $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$)

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

(minus $\bar{X}$)

Exkurs: Konstruktion des Konfidenzintervalls III

$$P\left(-\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

(mal -1, dadurch Umdrehen der Kleiner-Gleich-zeichen)

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$(-z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$$P\left(\bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

(Umschreiben)

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Konstruktion des Konfidenzintervalls IV

- Mit

$$U = \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$O = \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

ist also

$$I(X_1, \dots, X_n) = [U, O] = \left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für μ mit Konfidenzniveau $1 - \alpha$, da

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Problem

- Problem: Wir können die Realisationen u und o und somit das konkrete Konfidenzintervall

$$I(x_1, \ldots, x_n) = [u, o] = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

  nicht aus unserer Stichprobe berechnen.

- Es ist zwar möglich, den Mittelwert $\bar{x}$, den Stichprobenumfang n und das Quantil $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ zu bestimmen, **aber $\boldsymbol{\sigma^2}$ ist genau wie $\boldsymbol{\mu}$ unbekannt**.

Lösung

- Aber: Wir können σ^2 aus der Stichprobe schätzen.

- Also: Alles nochmal von vorne, aber diesmal mit einer geeigneten Schätzfunktion $\hat{\sigma}^2$ statt mit σ^2 selbst.

- Zur Erinnerung: Eine erwartungstreue, effiziente und konsistente Schätzfunktion für σ^2 ist

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Konstruktion eines Konfidenzintervalls für μ (jetzt wirklich)

Andere Standardisierung

- Ausgangssituation: $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ für *i* = 1, 2, …, *n*
- Wir wissen, dass $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Wir verwenden die Formel für die z-Standardisierung von $\bar{X}$, ersetzen aber σ^2 durch S^2.
- Also statt wie vorher

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

nun:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

Problem

- Problem: Die Zufallsvariable

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

ist keine z-standardisierte ZV und **nicht standardnormalverteilt**.

- Wir können die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_T von *T* aber immer noch bestimmen:
- *T* folgt einer *t*-Verteilung mit Parameter $\nu = n - 1$ (Beweis sehr schwierig)

t-Verteilung I

- Eine stetige Zufallsvariable T folgt einer **t-Verteilung**, falls ihr Träger aus den gesamten reellen Zahlen besteht, also $T_T = \mathbb{R}$ ist, und ihre Wahrscheinlichkeitsdichte die Form

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Hinweis: Die Formel der Dichte der t-Verteilung ist nicht prüfungsrelevant.

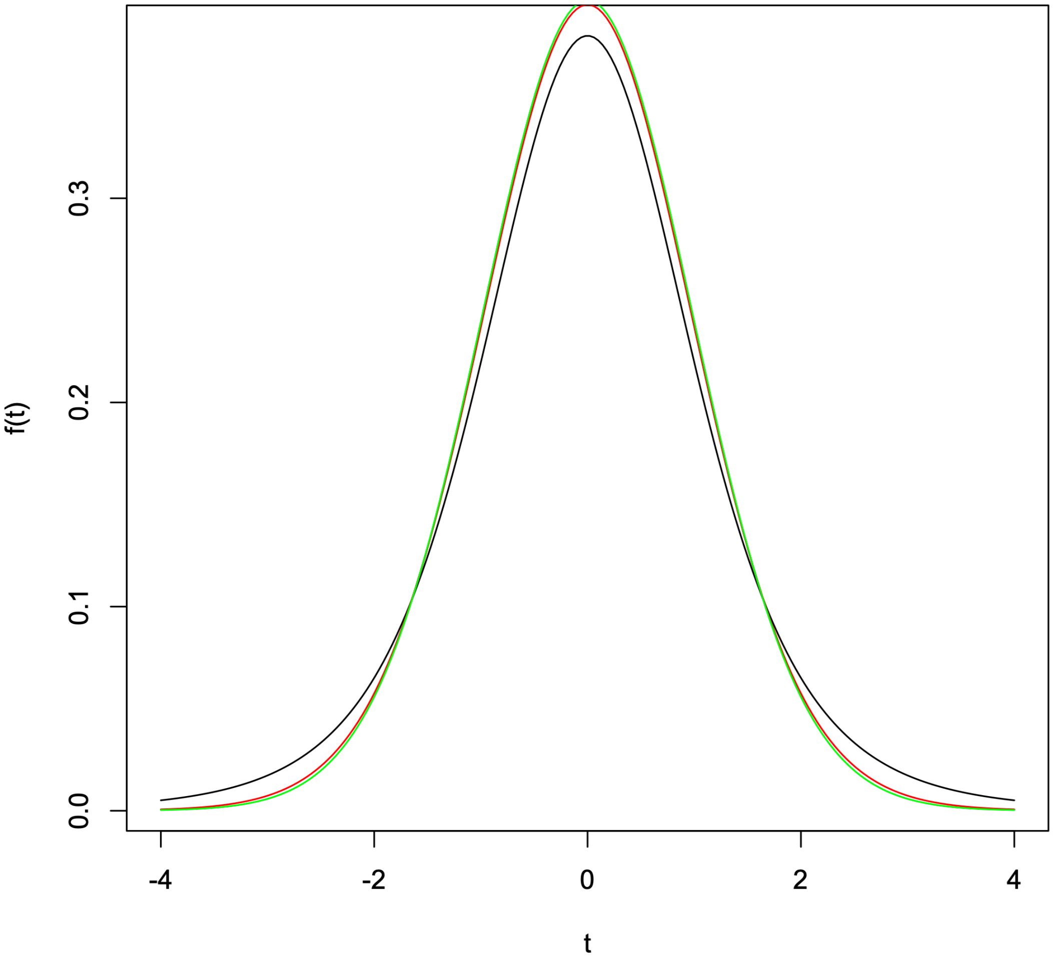
hat, wobei π für die Zahl Pi steht und Γ für die Gammafunktion (für uns unwichtig).

- Die t-Verteilung hat einen Parameter:
  - $\nu \in \mathbb{R}_+$

- Wenn wir sagen wollen, dass eine ZV T einer t-Verteilung mit Parameter ν folgt, schreiben wir: $T \sim t(\nu)$

t-Verteilung II

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dreier *t*-verteilter ZVs mit unterschiedlichen Werten für den Parameter ν:



ν = 5 schwarz
ν = 24 rot
ν = 50 grün

t-Verteilung III

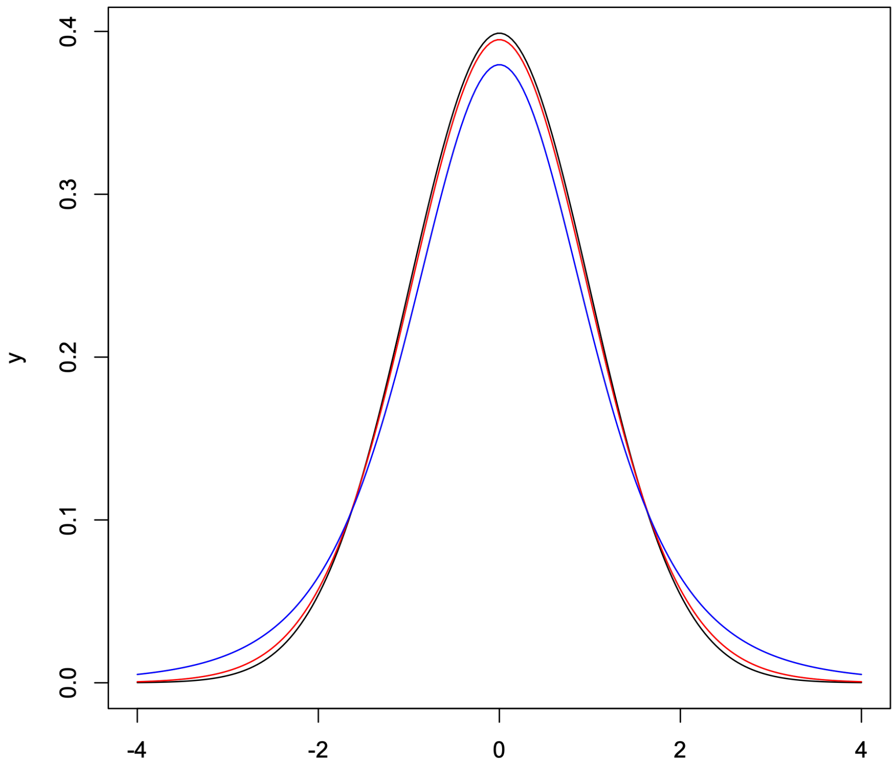
- Bemerkung I: Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der t-Verteilung ist für alle Werte des Parameters ν symmetrisch um 0.

- Bemerkung II: Für alle $\nu > 1$ ist der Erwartungswert einer t-verteilten Zufallsvariable T $E(T) = 0$.

t-Verteilung IV

- Bemerkung III: Der Parameter ν wird auch „Freiheitsgrad“ oder „degrees of freedom“ genannt.

- Bemerkung IV: Je höher der Wert des Parameters ν, desto näher liegt die Dichte der t-Verteilung an der Dichte der Standardnormalverteilung:



Standardnormalverteilung: schwarz
t-Verteilung mit υ = 24: rot
t-Verteilung mit υ = 5: blau

Quantile der t-Verteilung I

- Das weitere Vorgehen ist völlig analog zu vorher:

- Wir wissen, das *T* einer t-Verteilung mit $\nu = n - 1$ folgt und können mithilfe der Verteilungsfunktion *F* dieser t-Verteilung diejenigen Werte $t_{\frac{\alpha}{2}}$ und $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bestimmen, für die jeweils $F(t_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ und $F(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ gilt.

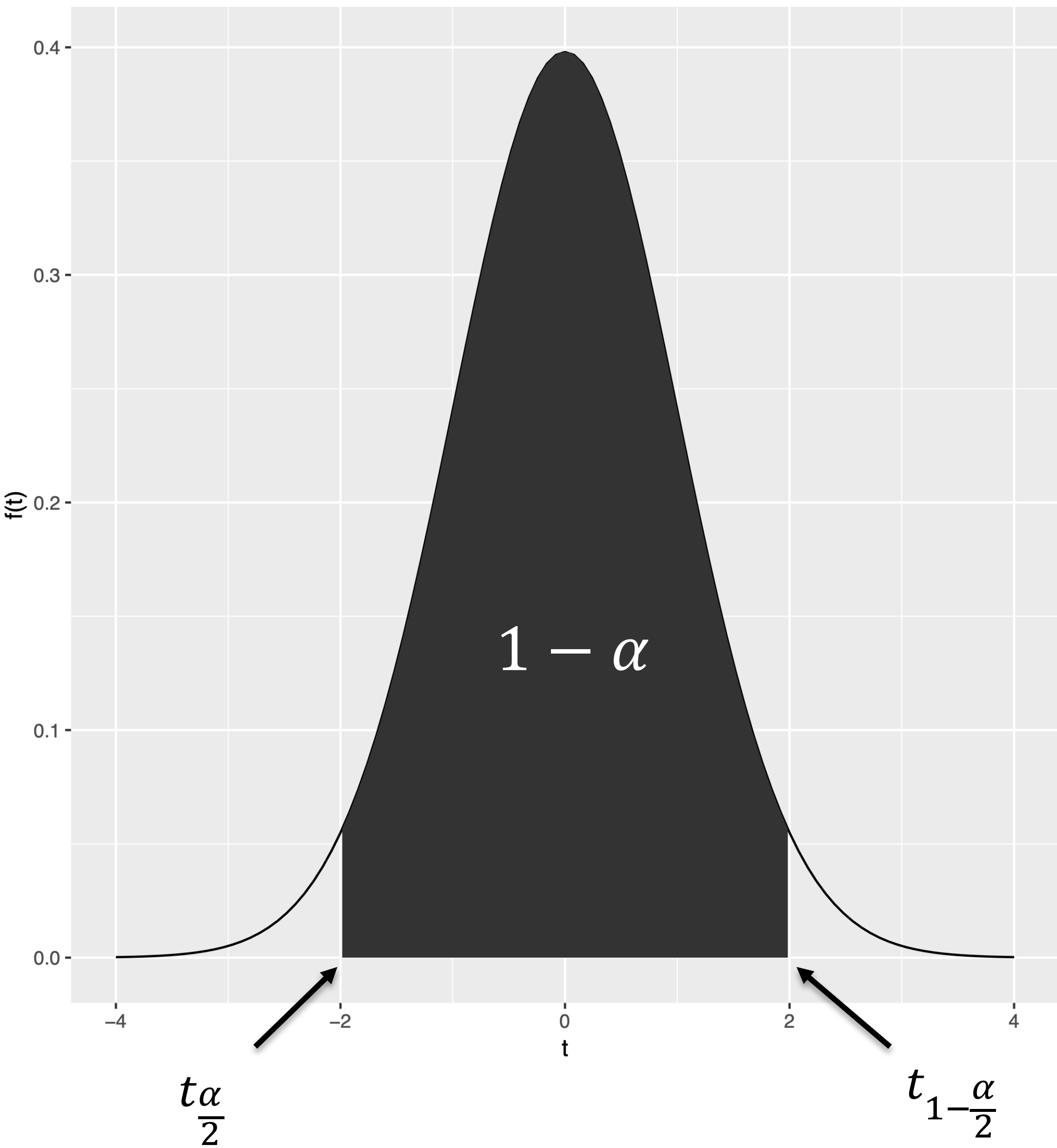
Zur Erinnerung:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

- Dann gilt:

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Quantile der t-Verteilung II



Quantile der t-Verteilung III

- Bemerkung: Aufgrund der Symmetrie der Dichtefunktion der t-Verteilung um die 0 ist

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{\frac{\alpha}{2}}$$

bzw.

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- Es reicht also, wenn wir eines der beiden Quantile berechnen.

- Wir berechnen die Quantile mithilfe der Funktion `qt` in R, z.B.

```
> qt(0.025, 99)
[1] -1.984217
```

um das Quantil $t_{0.025}$ einer t-Verteilung mit $\nu = 99$ zu berechnen.

Quantile der t-Verteilung IV

- Allgemein gilt:
- Je höher das gewünschte Konfidenzniveau $1 - \alpha$, desto größer die Quantile $t_{\frac{\alpha}{2}}$ und $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ im Betrag.

Konstruktion des Konfidenzintervalls I

- Zusammenfassung bis jetzt:

- Wir wissen, dass

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

einer t-Verteilung mit $\nu = n - 1$ folgt.

- Wir können deshalb die Quantile $t_{\frac{\alpha}{2}}$ und $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bestimmen, so dass

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

gilt.

Exkurs: Konstruktion des Konfidenzintervalls II

- Einsetzen von

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

in $P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ und Umstellen (alle Schritte genau wie vorher mit *Z*):

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Exkurs: Konstruktion des Konfidenzintervalls III

$$P\left(-\bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Konstruktion des Konfidenzintervalls IV

- Also ist

$$I(X_1, \dots, X_n) = [U, O] = \left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für μ mit Konfidenzniveau $1 - \alpha$, da

$$P\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

- Man kann zudem zeigen, dass dieses Konfidenzintervall eine minimale erwartete Länge hat.

Konkretes Konfidenzintervall

- Für dieses Konfidenzintervall können wir die Realisationen u und o und somit das konkrete Konfidenzintervall

$$I(x_1, \ldots, x_n) = [u, o] = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right]$$

  aus unserer Stichprobe berechnen.

- Wir müssen hierfür lediglich den Mittelwert $\bar{x}$, den Stichprobenumfang n, das Quantil $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ und den Schätzwert s^2 bestimmen.

Länge des konkreten Konfidenzintervalls I

- Zur Erinnerung:
  - Je länger das konkrete Konfidenzintervall, desto ungenauer unsere Schätzung.
  - Je kürzer das konkrete Konfidenzintervall, desto genauer unsere Schätzung.

- Drei Faktoren beeinflussen die Länge des konkreten Konfidenzintervalls:
  1. Das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ (indirekt über $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$)
     - ➢ Je höher das Konfidenzniveau, desto länger das Intervall.
  2. Der Stichprobenumfang n
     - ➢ Je größer der Stichprobenumfang, desto kürzer das Intervall.
  3. Der Schätzwert s^2 für σ^2
     - ➢ Je größer der Schätzwert s^2 für σ^2, desto länger das Intervall.

Länge des konkreten Konfidenzintervalls II

- **Sehr wichtig**:

- Da das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ auf jeden Fall hoch (z.B. 0.95) gewählt werden sollte und wir keinen Einfluss auf den Schätzwert s^2 haben, bleibt als einzige Größe, die wir beeinflussen können, der Stichprobenumfang n.

- Um kleine Konfidenzintervalle und somit genaue Schätzungen zu erhalten, müssen wir also eine **große Stichprobe** erheben.

Beispiel Intelligenz I

- Wir interessieren uns für den Mittelwert $\bar{x}_{IQ}$ des IQ in einer Population.
- Wir gehen davon aus, dass das Histogramm des IQ in der Population durch die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung approximiert werden kann.
- Wir ziehen eine einfache Zufallsstichprobe mit *n* = 100 Personen aus dieser Population.
- $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_{100}$ sind Zufallsvariablen, die jeweils für den IQ-Wert der *i*-ten Person in der Stichprobe stehen.
- $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$
- $\mu = \bar{x}_{IQ}$ und $\sigma^2 = s^2_{emp\ IQ}$
- Wir wollen nun ein 0.95-Konfidenzintervall für μ berechnen.

Beispiel Intelligenz II

- Das konkrete Konfidenzintervall hat die Form

$$I(x_1, \ldots, x_n) = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right]$$

- Um dieses berechnen zu können, benötigen wir $\bar{x}$, s^2, *n* und $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

- Zum Beispiel könnte sich in unserer Stichprobe ergeben:

$$\bar{x} = 102$$

$$s^2 = 220$$

- Wir wissen zudem, dass *n* = 100 ist.

Beispiel Intelligenz III

- Wir müssen also nur noch $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ berechnen:
- Das von uns gewünschte Konfidenzniveau ist $1 - \alpha = 0.95$ (übliche Konvention).
- Damit ist $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ und somit $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{1-0.025} = t_{0.975}$.
- Wir wissen, dass der Parameter der t-Verteilung der ZV *T* in unserem Fall $\nu = n - 1 = 100 - 1 = 99$ ist.
- Damit können wir $t_{0.975}$ in R berechnen:

```
> qt(0.975, 99)
[1] 1.984217
```

- Also ist $t_{0.975} \approx 1.98$

Beispiel Intelligenz IV

- Einsetzen von $\bar{x} = 102$, $s^2 = 220$, n = 100 und $t_{0.975} \approx 1.98$ in das konkrete Konfidenzintervall:

$$I(x_1, \ldots, x_n) = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right]$$

$$= \left[102 - 1.98 \cdot \sqrt{\frac{220}{100}}, 102 + 1.98 \cdot \sqrt{\frac{220}{100}}\right]$$

$$\approx [99.06, 104.94]$$

Beispiel Intelligenz V

- Ergebnis der Berechnung des konkreten Konfidenzintervalls:

$$I(x_1, \dots, x_n) = [99.06, 104.94]$$

- Interpretation:
  - Auf Basis unserer Stichprobe sind die Werte in dem Intervall $[99.06, 104.94]$ **die plausiblen Werte für $\boldsymbol{\mu}$** und somit für den Mittelwert $\bar{x}_{IQ}$ des IQ in der Population.

- **Wichtig**: Die Aussage, dass $P\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$ bezieht sich auf das **zufällige Intervall**. In einem konkreten, aus einer Stichprobe berechneten Intervall dürfen wir nicht ohne Weiteres Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen! Deshalb sprechen wir in konkreten Intervallen immer „nur“ von plausiblen Werten.

Zusammenfassung

- Mit Konfidenzintervallen versuchen wir, die Genauigkeit einer Schätzung des Parameters μ interpretierbarer zu machen.
- Für ein **zufälliges** Konfidenzintervall können wir berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der gesuchte Parameterwert enthalten ist.
- Diese Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau $1 - \alpha$) ist idealerweise hoch (> 0.95) und das Intervall dabei so klein wie möglich.
- Mit Hilfe der z-Standardisierung der normalverteilten Schätzfunktion $\bar{X}$ können wir theoretisch ein Intervall entwickeln, das diese Eigenschaften erfüllt. Aufgrund unbekannter Parameterwerte kann dieses Intervall jedoch praktisch nicht berechnet werden.
- Verwendet man stattdessen Schätzungen für diese unbekannten Parameterwerte, wird statt der Standardnormalverteilung die t-Verteilung zur Konstruktion der Intervalle benötigt.
- Wenn wir mit diesen Vorüberlegungen ein **konkretes** Intervall auf Basis einer Stichprobe konstruieren, sind wir **zuversichtlich,** dass der gesuchte Parameterwert darin enthalten ist. Eine Wahrscheinlichkeitsaussage ist bei einem einzelnen konkreten Intervall aber nicht mehr ohne Weiteres möglich.

Interpretation des Konfidenzintervalls

https://rpsychologist.com/d3/ci/