5. Vorlesung Statistik I
Wahrscheinlichkeitstheorie II

Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen

Motivation

- Genau wie für die „normalen“ Variablen aus der Deskriptivstatistik lassen sich auch für Zufallsvariablen Lage- und Streuungsmaße definieren:
    - Lagemaße zur Beschreibung von einer „typischen“ Realisation der ZV.
    - Streuungsmaße zur Beschreibung des Ausmaßes der Unterschiedlichkeit der Realisationen.

- Wir werden die folgenden Maßzahlen besprechen:
    - als wichtigstes Lagemaß den **Erwartungswert**.
    - als wichtigste Streuungsmaße die **Varianz** und die **Standardabweichung**.

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Wiederholung: Definition des Mittelwerts

- Zur Erinnerung: In der Deskriptivstatistik haben wir als Lagemaß den Mittelwert kennengelernt.

- Gegeben seien die Messwerte $x_1, x_2, \dots, x_n$. Der Mittelwert ist definiert als

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Eine äquivalente Definition ist:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot h(x_j)$$

- Das heißt, jeder Summand entspricht einer Messwertausprägung x_j multipliziert mit der relativen Häufigkeit $h(x_j)$.

- Wie könnte sich diese zweite Formel auf diskrete Zufallsvariablen X übertragen lassen?

Definition: Erwartungswert einer diskreten ZV

- Lösung: Gleiche Formel, aber
  - statt Messwertausprägungen Realisationen
  - statt relativen Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten

- Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer diskreten ZV *X* ist also:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot P\left(X = x_j\right)$$

- Der Erwartungswert $E(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X entspricht somit der Summe aller möglichen Realisationen jeweils multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit.

- Falls eine Wahrscheinlichkeitsfunktion *f* von *X* gegeben ist, gilt für den Erwartungswert wegen $f\left(x_j\right) = P\left(X = x_j\right)$:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot P\left(X = x_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f\left(x_j\right)$$

Definition: Erwartungswert einer stetigen ZV

- Um den Erwartungswert für stetige ZVs zu definieren, gehen wir von der Formel für diskrete ZVs aus, ersetzen aber
  - die Summe durch ein Integral
  - die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

- Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer stetigen ZV *X* ist also:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Interpretation des Erwartungswerts

- Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariablen X ist eine konkrete Zahl.
- Er kann sowohl für diskrete als auch für stetige Zufallsvariablen wie folgt interpretiert werden:
- Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable *X* entspricht der **durchschnittlichen Realisation von *X*,** wenn das X zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholt wird.

Beispiel: Berechnung des Erwartungswerts

- In einer Lostrommel befinden sich 10 Lose, darunter ein Gewinn zu 5 Euro und zwei Gewinne zu je 2 Euro. Ein Los kostet 1 Euro.
- Die Zufallsvariable *X* stehe für den erzielten Gewinn bzw. Verlust.
- $T_x = \{-1, 1, 4\}$ mit $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$.
- Wahrscheinlichkeitsfunktion von *X*:

x_j	$f(x_j)$
-1	0.7
1	0.2
4	0.1

- Erwartungswert von *X*:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{3} x_j \cdot f(x_j) = -1 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = -0.1$$

- Interpretation?

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Seien X und Y und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diskrete oder stetige ZVs und *a* eine beliebige reelle Zahl (eine Konstante). Dann gilt:

$$E(a) = a$$

$$E(X + a) = E(X) + a$$

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Zwischengliederung

- Bislang:
  - Erwartungswert

- Jetzt:
  - Varianz und Standardabweichung

Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariable

Wiederholung: Definition der empirischen Varianz

- Zur Erinnerung: In der Deskriptivstatistik haben wir als Streuungsmaß die empirische Varianz kennengelernt.

- Gegeben seien die Messwerte $x_1, x_2, \dots, x_n$. Die empirische Varianz ist definiert als:

$$s_{emp}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- Eine äquivalente Definition ist:

$$s_{emp}^2 = \sum_{j=1}^{m}(x_j - \bar{x})^2 \cdot h(x_j)$$

- Das heißt, jeder Summand entspricht der quadratischen Abweichung einer Messwertausprägung x_j vom arithmetischen Mittel $\bar{x}$ multipliziert mit der relativen Häufigkeit $h(x_j)$.

- Wie könnte sich dies auf diskrete Zufallsvariablen X übertragen lassen?

Definition: Varianz einer diskreten ZV

- Lösung: Gleiche Formel, aber
  - statt Messwertausprägungen Realisationen
  - statt relativen Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten
  - statt Mittelwert Erwartungswert

- Die **Varianz** $Var(X)$ einer diskreten ZV *X* ist also:

$$Var(X) = \sum_{j=1}^{m} (x_j - E(X))^2 \cdot P\left(X = x_j\right)$$

- Falls eine Wahrscheinlichkeitsfunktion *f* von *X* gegeben ist, gilt für die Varianz wegen $f\left(x_j\right) = P\left(X = x_j\right)$:

$$Var(X) = \sum_{j=1}^{m} (x_j - E(X))^2 \cdot P\left(X = x_j\right) = \sum_{j=1}^{m} (x_j - E(X))^2 \cdot f\left(x_j\right)$$

Definition: Varianz einer stetigen ZV

- Um die Varianz für stetige ZVs zu definieren, gehen wir von der Formel für diskrete ZVs aus, ersetzen aber
  - die Summe durch ein Integral
  - die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

- Die **Varianz** $Var(X)$ einer stetigen ZV *X* ist also:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x)dx$$

Definition: Standardabweichung einer ZV

- Die **Standardabweichung** $SD(X)$ ist sowohl für diskrete als auch für stetige ZVs definiert als die Wurzel der Varianz:

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Interpretation der Varianz und der Standardabweichung

- Die Varianz $Var(X)$ und die Standardabweichung $SD(X)$ einer Zufallsvariablen X sind konkrete Zahlen.

- Sie können sowohl für diskrete als auch für stetige Zufallsvariablen wie folgt interpretiert werden:

- Die Varianz $Var(X)$ einer Zufallsvariable *X* entspricht der **empirischen Varianz der Realisationen von *X*,** wenn das X zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholt wird.

- Die Standardabweichung $SD(X)$ einer Zufallsvariable *X* entspricht der **empirischen Standardabweichung der Realisationen von *X*,** wenn das X zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholt wird.

- Also: Genau wie bei empirischer Varianz und Standardabweichung nicht wirklich intuitiv.

Beispiel: Berechnung der Varianz und der Standardabweichung

- Losbeispiel von Folie 9. Zur Erinnerung: $E(X) = -0.1$

x_j	$x_j - E(X)$	$\left(x_j - E(X)\right)^2$	$f(x_j)$
-1	- 0.9	0.81	0.7
1	1.1	1.21	0.2
4	4.1	16.81	0.1

$$Var(X) = \sum_{j=1}^{3} (x_j - E(X))^2 \cdot f\left(x_j\right) = 0.81 \cdot 0.7 + 1.21 \cdot 0.2 + 16.81 \cdot 0.1 = 2.49$$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.49} = 1.58$$

Rechenregeln für die Varianz und die Standardabweichung

- Sei X eine diskrete oder stetige ZV und *a* eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:

$$Var(X + a) = Var(X)$$

$$SD(X + a) = SD(X)$$

$$Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$$

$$SD(a \cdot X) = a \cdot SD(X)$$

Weitere Maße zur Beschreibung von Zufallsvariablen

- Neben dem Erwartungswert und der Varianz gibt es viele weitere Maßzahlen zur Beschreibung von Zufallsvariablen.

- Beispielsweise lassen sich auch Median, Modus und Interquartilsabstand von Zufallsvariablen definieren. Diese werden wir hier aber nicht besprechen.

- Außerdem ist es möglich, für zwei Zufallsvariablen X und Y Kovarianz und Korrelation zu definieren, um deren Zusammenhang zu beschreiben. Damit werden wir uns im Rahmen der Vorlesung Diagnostik I / Statistik III beschäftigen.

Zwischengliederung

- Bislang:
  - Erwartungswert
  - Varianz und Standardabweichung

- Jetzt:
  - z-Standardisierung von Zufallsvariablen

z-Standardisierung von Zufallsvariablen

z-Standardisierung von Zufallsvariablen I

- Zur Erinnerung: In der Deskriptivstatistik haben wir Variablen z-standardisiert, indem wir von jedem Messwert den Mittelwert abgezogen haben und diese Differenz durch die empirische Standardabweichung geteilt haben:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_{emp\ x}}$$

- Für z-standardisierte Variablen gilt:
  - $\bar{z} = 0$
  - $s_{emp\ z} = 1.$

z-Standardisierung von Zufallsvariablen II

- Auch Zufallsvariablen können z-standardisiert werden. Hierfür ziehen wir von der Zufallsvariable *X* ihren Erwartungswert $E(X)$ ab und teilen diese Differenz durch die Standardabweichung $SD(X)$ von *X*. Diese Transformation ergibt eine neue **z-standardisierte Zufallsvariable *Z*:**

$$Z = \frac{X - E(X)}{SD(X)}$$

- Für z-standardisierte Zufallsvariablen *Z* gilt:
  - $\mathrm{E}(Z) = 0$
  - $SD(Z) = 1.$

Zwischengliederung

- Bislang:
  - Erwartungswert
  - Varianz und Standardabweichung
  - z-Standardisierung von Zufallsvariablen

- Jetzt:
  - Konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen

Konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen I

- Zur Erinnerung: Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X einer Zufallsvariablen *X* weist jedem Ereignis A_X der Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeit $P_X(A_X)$ zu.

- Wenn wir also eine konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X angeben wollen, müssen wir für jedes Ereignis A_X eine konkrete Wahrscheinlichkeit angeben.

- Problem: Dies ist in den meisten Fällen extrem aufwendig bis unmöglich.

- Lösung: Charakterisierung von P_X durch Angabe einer
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion im Falle einer diskreten ZV *X*.
  - Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Falle einer stetigen ZV *X*.

- Dann können die Wahrscheinlichkeiten $P_X(A_X)$ aller Ereignisse A_X einfach mithilfe dieser berechnet werden.

Konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen II

- Wir werden daher konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen jeweils durch Angabe ihrer Wahrscheinlichkeitsfunktion oder ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion definieren.

- Die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden wir kennenlernen:
    - **Bernoulli-Verteilung**
    - **Binomialverteilung**
    - **Normalverteilung**

- Für alle diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden wir jeweils
    - die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
    - die Verteilungsfunktion
    - den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung betrachten.

Bernoulli-Verteilung

Wahrscheinlichkeitsfunktion I

- Als **Bernoulli-Variable** bezeichnet man eine Zufallsvariable X, die sich nur in den Werten $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ realisieren kann.
- Eine Bernoulli-Variable ist also eine diskrete ZV mit Träger $T_x = \{0,1\}$.
- Häufig wird die Realisation 1 als „Erfolg" und die Realisation 0 als „Misserfolg" bezeichnet.

- Beispiel 1: Beim Wurf eines sechsseitigen Würfels wird den Augenzahlen 1, 2 und 3 durch die ZV *X* der Wert 1 und den Augenzahlen 4, 5 und 6 der Wert 0 zugeordnet.
- Beispiel 2: Bei einer zufällig gewählten Person wird durch die ZV X der Merkmalsausprägung „braune Augen" der Wert 1 und der Merkmalsausprägung „andere Augenfarbe" der Wert 0 zugeordnet.

Wahrscheinlichkeitsfunktion II

- Um die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Bernoulli-Variablen anzugeben, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse angeben, also die Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“ $P(X = 1)$ und die Wahrscheinlichkeit für „Misserfolg“ $P(X = 0)$.

- Sei also $P(X = 1) = \pi$, wobei π ein beliebiger Wert zwischen 0 und 1 ist. Dann ist $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 1 - \pi$

- Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Bernoulli-Variable dann:

$$f(0) = P(X = 0) = 1 - \pi$$

$$f(1) = P(X = 1) = \pi$$

Hinweis:
Das Symbol π steht hier NICHT für die Zahl „Pi“ ≈ 3.14

- Beziehungsweise etwas kompakter mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$:

$$f\left(x_j\right) = \pi^{x_j}(1 - \pi)^{1-x_j}$$

Hinweis: $a^0 = 1$ für beliebiges a

- Die zu dieser Wahrscheinlichkeitsfunktion gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung wird **Bernoulli-Verteilung** genannt.

Wahrscheinlichkeitsfunktion III

- Die konkrete Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Bernoulli-Variable hängt davon ab, welchem konkreten Wert π entspricht.

- Für jeden konkreten Wert π ergibt sich eine andere Wahrscheinlichkeitsfunktion und somit auch eine andere konkrete Bernoulli-Verteilung.

- Zum Beispiel:
  - π = 0.2: $f\left(x_j\right) = 0.2^{x_j} \cdot 0.8^{1-x_j}$
  - π = 0.5: $f\left(x_j\right) = 0.5^{x_j} \cdot 0.5^{1-x_j} = 0.5$
  - π = 0.7: $f\left(x_j\right) = 0.7^{x_j} \cdot 0.3^{1-x_j}$
  - usw.

Wahrscheinlichkeitsfunktion IV

- Eine Größe, deren Ausprägung die konkrete Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung innerhalb einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen festlegt, nennt man **Parameter**.

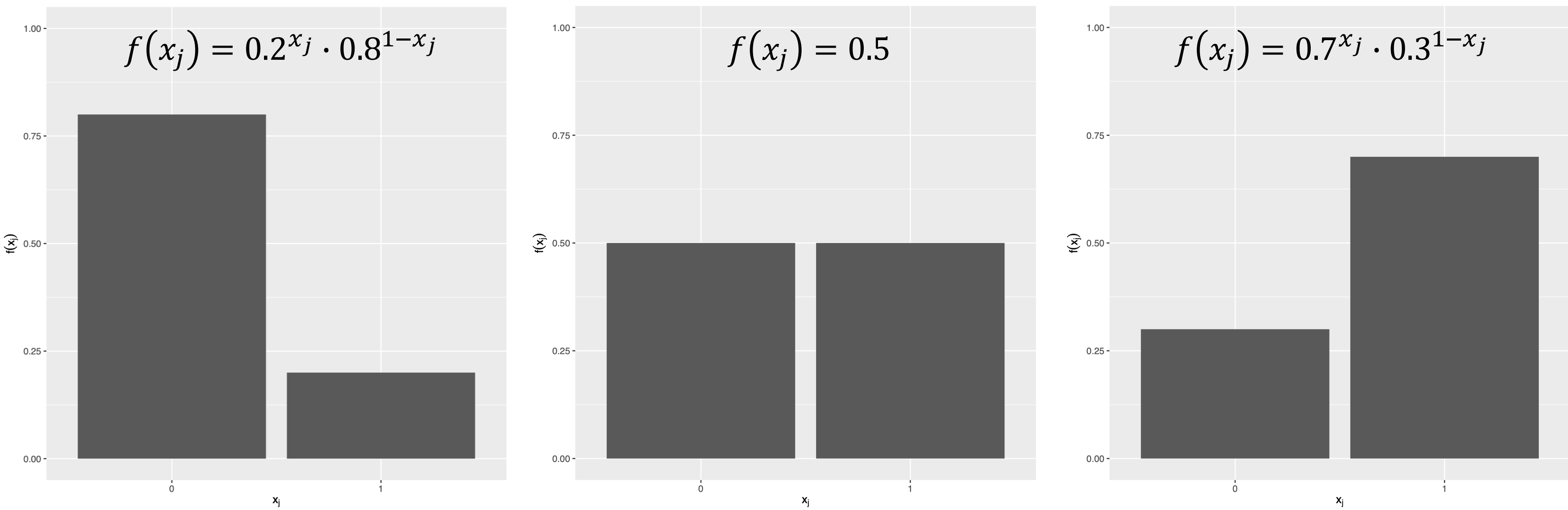
- π ist der Parameter der Klasse der Bernoulli-Verteilungen.

- Wenn wir sagen wollen, dass eine ZV X einer Bernoulli-Verteilung mit Parameter π folgt, schreiben wir: $X \sim Be(\pi)$

Wahrscheinlichkeitsfunktion V

- Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen einiger ZVs mit Bernoulli-Verteilung und unterschiedlichen Werten für den Parameter π:

π = 0.2 π = 0.5 π = 0.7



- Interpretation π: Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Bernoulli-Variable im Wert 1 realisiert, also Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“.

Verteilungsfunktion I

- Zur Erinnerung: Bei diskreten Zufallsvariablen besteht folgender Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsfunktion und der Verteilungsfunktion:

$$F(x_k) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j)$$

Verteilungsfunktion II

- Für ZVs mit Bernoulli-Verteilung ist die Verteilungsfunktion also:

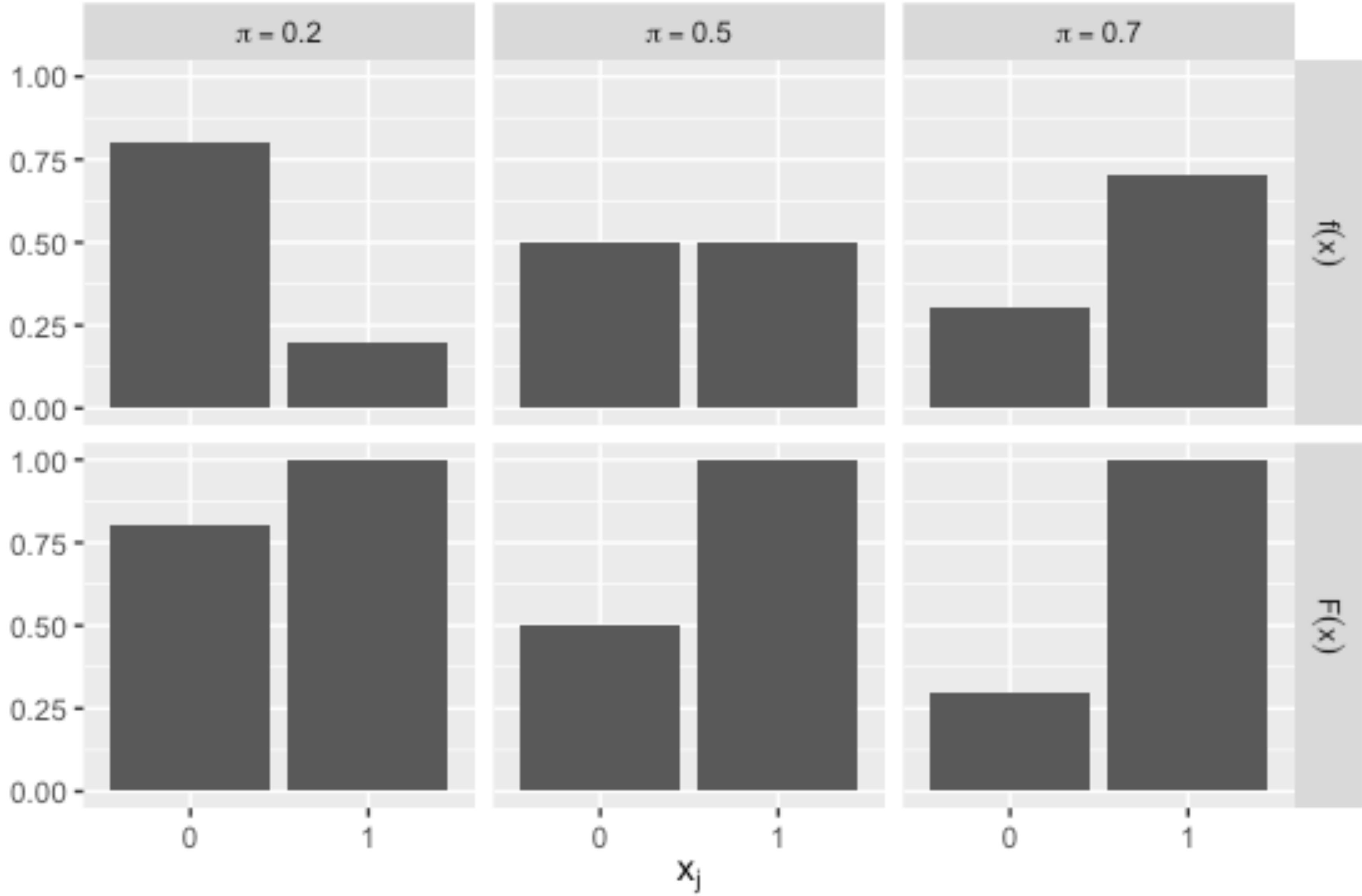
$$F(x_k) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) = \sum_{j=1}^{k} \pi^{x_j}(1-\pi)^{1-x_j}$$

- Einsetzen von $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$:

$$F(0) = F(x_1) = \sum_{j=1}^{1} f(x_j) = f(x_1) = 1 - \pi$$

$$F(1) = F(x_2) = \sum_{j=1}^{2} f(x_j) = f(x_1) + f(x_2) = \pi + (1-\pi) = 1$$

Verteilungsfunktion III



Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung I

- Der Erwartungswert einer ZV mit Bernoulli-Verteilung mit Parameter π kann leicht berechnet werden:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f(x_j) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) = 0 \cdot (1 - \pi) + 1 \cdot \pi = \pi$$

- Daraus folgt für die Varianz:

$$Var(X) = \sum_{j=1}^{m} \left(x_j - E(X)\right)^2 \cdot f(x_j) = (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) + (1 - \pi)^2 \cdot \pi$$

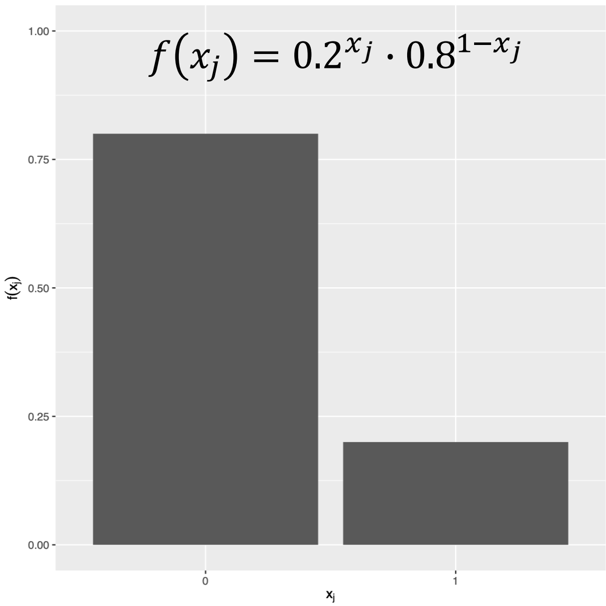
$$= \pi^2 - \pi^3 + \pi - 2\pi^2 + \pi^3 = \pi(1 - \pi)$$

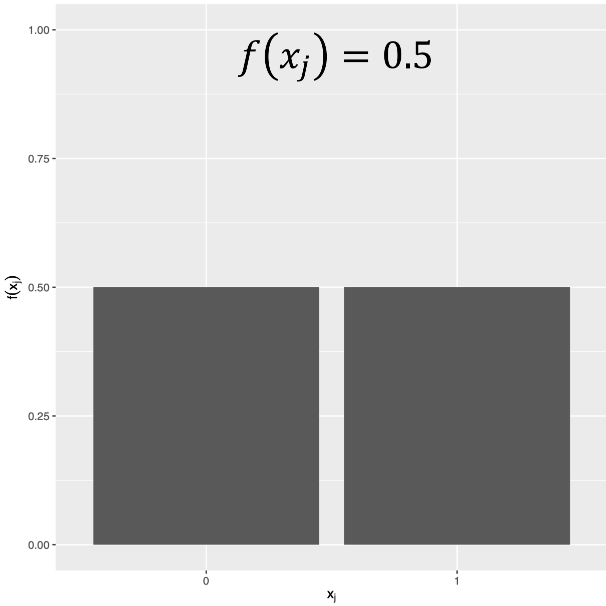
- Die Standardabweichung ist somit:

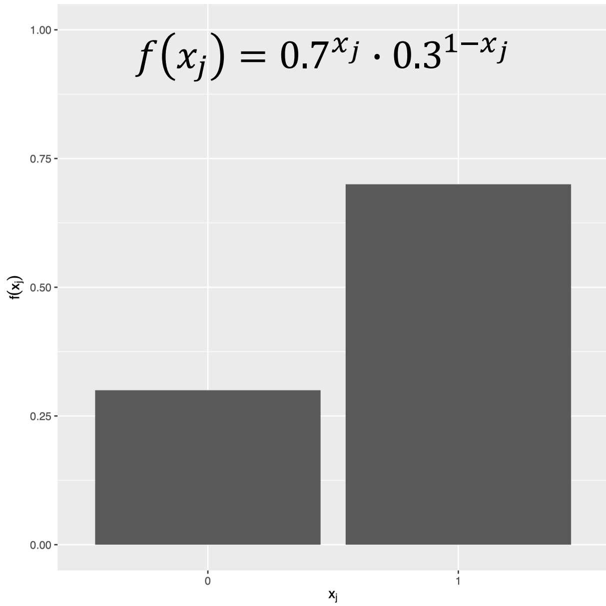
$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\pi(1 - \pi)}$$

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung II

π = 0.2	π = 0.5	π = 0.7







π = 0.2	π = 0.5	π = 0.7
$E(X) = \pi = 0.2$	$E(X) = 0.5$	$E(X) = 0.7$
$Var(X) = \pi(1-\pi) = 0.16$	$Var(X) = 0.25$	$Var(X) = 0.21$
$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = 0.4$	$SD(X) = 0.5$	$SD(X) \approx 0.46$

- Weitere Interpretation von π (neben $\pi = P(X = 1)$): Erwartungswert von X

Binomialverteilung

Vorbereitungen

- Zunächst einige Vorbereitungen:
  - Binomialkoeffizient
  - Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
  - Summen von unabhängigen Bernoulli-Variablen

Binomialkoeffizient I

- Definition der **Fakultät** einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$:
  - Unter der Fakultät $n!$ versteht man das Produkt der ganzen Zahlen von 1 bis n:
    $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
  - Per Definition ist $0! = 1$
  - Beispiele:

    $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

    $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

    $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ \dots \ \cdot 10 = 3628800$

Binomialkoeffizient II

- Definition des **Binomialkoeffizienten** für $n, k \in \mathbb{N}$ und $n > k$:
  - Der Ausdruck $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ heißt Binomialkoeffizient
  - Beispiele:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{120}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{12} = 10$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{6}{6} = 1$$

Hinweis:
Der Binomialkoeffizient lässt sich mit (fast) jedem Taschenrechner berechnen.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

- Die genaue Definition der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen ist etwas schwierig und für uns nur selten praktisch relevant.

- Wir begnügen uns daher mit einer intuitiven Definition:

  Zwei Zufallsvariablen *X* und *Y* sind **unabhängig**, falls die Realisation der ZV *X* keine Auswirkungen darauf hat, wie sich die ZV *Y* realisiert und umgekehrt.

- Für zwei unabhängige Zufallsvariablen *X* und *Y* gibt es eine weitere Varianz-Rechenregel:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

- Allgemein gilt für *n* unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Exkurs: Unabhängigkeit von Ereignissen

- Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind unabhängig, wenn gilt:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$$

Exkurs: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

- Unabhängigkeit von **diskreten Zufallsvariablen**:
- Die diskreten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig, wenn für beliebige Realisationen $x_1, \dots, x_n$ aus den jeweiligen Trägern der Zufallsvariablen gilt:
- $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \cdots \cdot P(X_n = x_n)$
- Unabhängigkeit von **stetigen Zufallsvariablen**:
- Die stetigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig, wenn für beliebige Realisationen $x_1, \dots, x_n$ aus den jeweiligen Trägern der Zufallsvariablen gilt:
- $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot \cdots \cdot P(X_n \leq x_n)$

Hinweis:
Die Schreibweise $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ bezeichnet die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, dass die ZV X_1 den Wert x_1 annimmt und gleichzeitig die ZV X_2 den Wert x_2 annimmt.

Summen von unabhängigen Bernoulli-Variablen I

- Wir betrachten *n* unabhängige Bernoulli-Variablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ mit

$$X_i \sim Be(\pi)$$

  für alle *i* = 1, 2, …, *n*

- Das heißt, alle *n* Bernoulli-Variablen sind unabhängig und folgen jeweils einer Bernoulli-Verteilung mit demselben Parameter π.

- Beispiel:
  - Zufallsexperiment*:* Eine Münze wird *n*-mal unabhängig voneinander geworfen.
  - X_i gibt jeweils an, ob beim *i*-ten Wurf Kopf oder Zahl oben landet:

$$X_i = \begin{cases} 0 & falls\ Zahl\ bei\ Wurf\ i\ oben\ landet \\ 1 & falls\ Kopf\ bei\ Wurf\ i\ oben\ landet \end{cases}$$

Summen von unabhängigen Bernoulli-Variablen II

- Die Summe dieser *n* Bernoulli-Variablen

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

  ist wieder eine Zufallsvariable.

- Da die einzelnen Bernoulli-Variablen X_i sich jeweils nur in den Werten 0 und 1 realisieren können, steht die ZV *X* für die Anzahl der Bernoulli-Variablen, die sich in dem Wert 1 realisiert haben, d.h. für die „Anzahl der Erfolge".

- Im Münzwurf-Beispiel steht *X* für die Anzahl Kopf bei *n* Münzwürfen.

Summen von unabhängigen Bernoulli-Variablen III

- *X* kann ganzzahlige Werte zwischen 0 („kein Erfolg“) und *n* („*n* Erfolge“) annehmen, je nachdem wie viele der *n* einzelnen Bernoulli-Variablen sich in dem Wert 1 realisieren.

- Der Träger von *X* ist also $T_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ und *X* ist somit eine diskrete ZV.

- Man kann beweisen, dass *X* die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f\left(x_j\right) = \binom{n}{x_j} \pi^{x_j} (1-\pi)^{n-x_j}$$

besitzt, wobei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, … , $x_m = n$ ist.

- Dies ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung.

Wahrscheinlichkeitsfunktion I

- Eine Zufallsvariable X folgt einer **Binomialverteilung**, falls ihr Träger $T_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ist, und ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion die Form

$$f(x_j) = \binom{n}{x_j} \pi^{x_j} (1 - \pi)^{n - x_j}$$

aufweist, wobei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, …, $x_m = n$ ist.

- Die Binomialverteilung hat zwei Parameter:
  - $n \in \mathbb{N}$.
  - $\pi \in [0, 1]$

- Wenn wir sagen wollen, dass eine ZV *X* einer Binomialverteilung mit Parametern n und π folgt, schreiben wir: $X \sim B(n, \pi)$

Wahrscheinlichkeitsfunktion II

- Konkrete Beispiele für unterschiedliche Werte der Parameter *n* und π:

  - $n = 10$ und $\pi = 0.2$:

$$f(x_j) = \binom{n}{x_j}\pi^{x_j}(1-\pi)^{n-x_j} = \binom{10}{x_j}0.2^{x_j}(1-0.2)^{10-x_j} = \binom{10}{x_j}0.2^{x_j}\cdot 0.8^{10-x_j}$$

  - $n = 10$ und $\pi = 0.5$:

$$f(x_j) = \binom{n}{x_j}\pi^{x_j}(1-\pi)^{n-x_j} = \binom{10}{x_j}0.5^{x_j}(1-0.5)^{10-x_j} = \binom{10}{x_j}0.5^{10}$$

  - $n = 10$ und $\pi = 0.7$:

$$f(x_j) = \binom{n}{x_j}\pi^{x_j}(1-\pi)^{n-x_j} = \binom{10}{x_j}0.7^{x_j}(1-0.7)^{10-x_j} = \binom{10}{x_j}0.7^{x_j}\cdot 0.3^{10-x_j}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion III

- Beispiel für die Berechnung der Funktionswerte $f(x_j)$ für $n = 3$ und $\pi = 0.5$:

$$f(x_j) = \binom{n}{x_j} \pi^{x_j} (1-\pi)^{n-x_j}$$

$$f(x_1) = f(0) = \binom{3}{0} 0.5^0 (1-0.5)^{3-0} = 1 \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^3 = 0.125$$

$$f(x_2) = f(1) = \binom{3}{1} 0.5^1 (1-0.5)^{3-1} = 3 \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^2 = 0.375$$

$$f(x_3) = f(2) = \binom{3}{2} 0.5^2 (1-0.5)^{3-2} = 3 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^1 = 0.375$$

$$f(x_4) = f(3) = \binom{3}{3} 0.5^3 (1-0.5)^{3-3} = 1 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 0.125$$

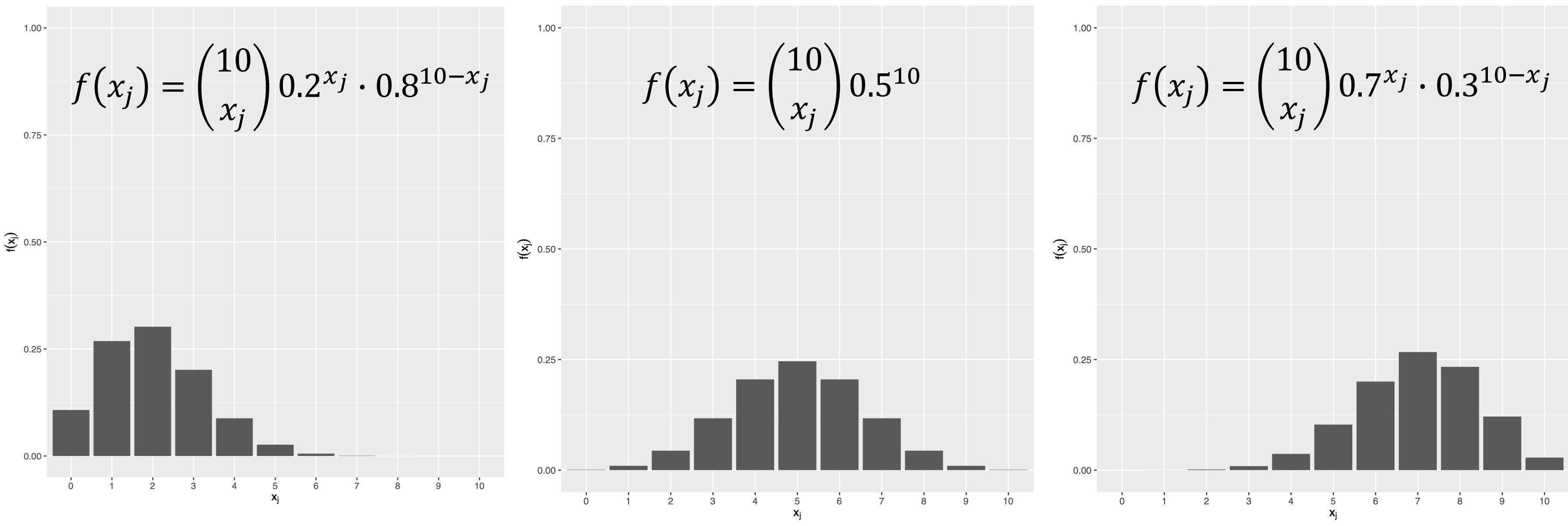
Wahrscheinlichkeitsfunktion IV

- Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen einiger ZVs mit Binomialverteilung mit *n* = 10 und unterschiedlichen Werten für den Parameter π:

n = 10
π = 0.2

n = 10
π = 0.5

n = 10
π = 0.7



- Interpretation *n*: Anzahl der zugrundeliegenden Bernoulli-Variablen X_i.
- Interpretation π: Wahrscheinlichkeit für Erfolg der zugrundeliegenden Bernoulli-Variablen X_i.

Verteilungsfunktion I

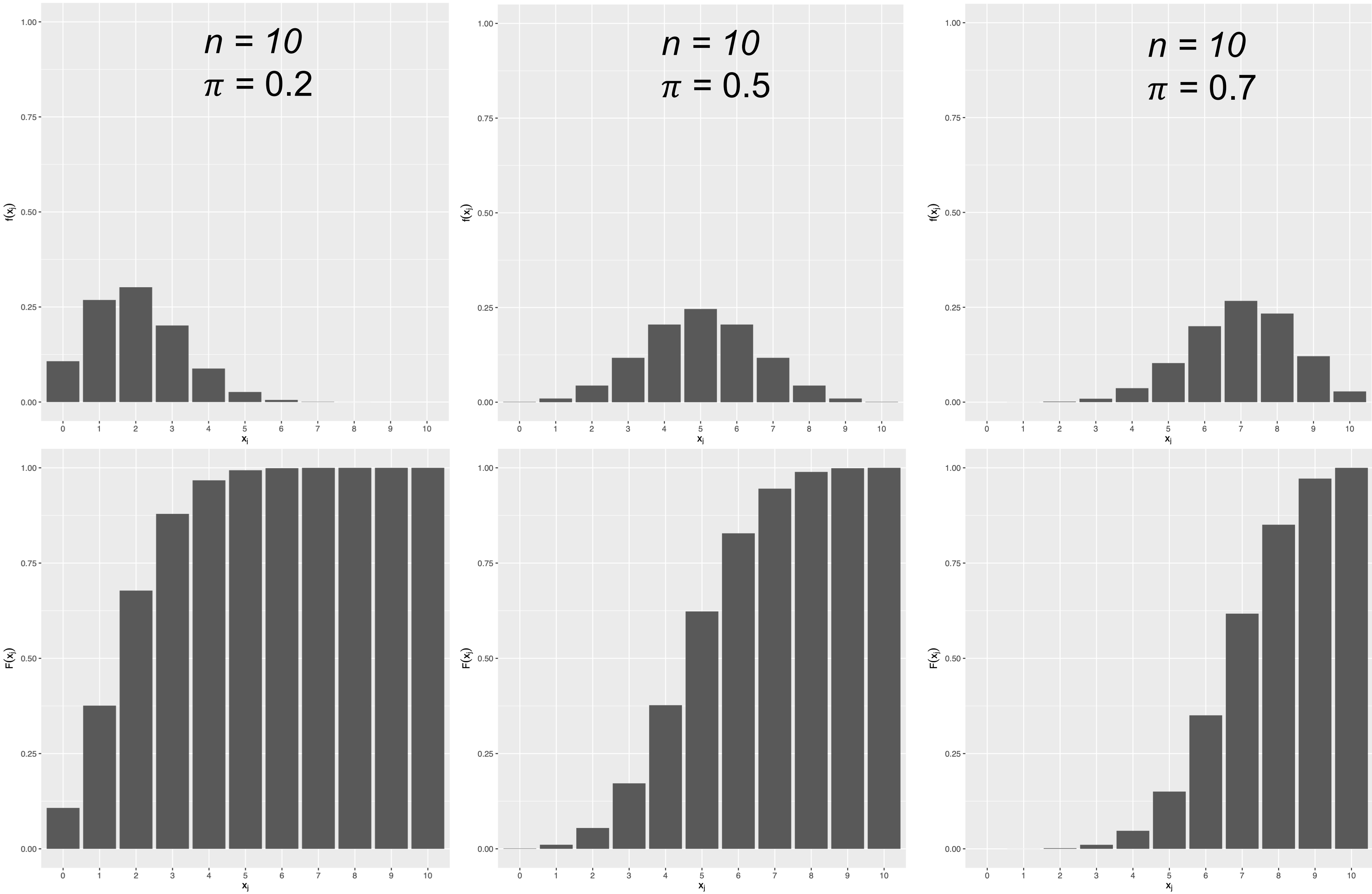
- Zur Erinnerung: Bei einer diskreten Zufallsvariable X gilt für die Verteilungsfunktion:

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j)$$

- Die Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariable X ist somit:

$$F(x_k) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{x_j} \pi^{x_j} (1-\pi)^{n-x_j}$$

Verteilungsfunktion II



Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung I

- Der Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable X ergibt sich aus den Erwartungswerten der einzelnen Bernoulli-Variablen X_i :

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \pi = n\pi$$

- Die Varianz ergibt sich aus den Varianzen der einzelnen Bernoulli-Variablen X_i und deren Unabhängigkeit:

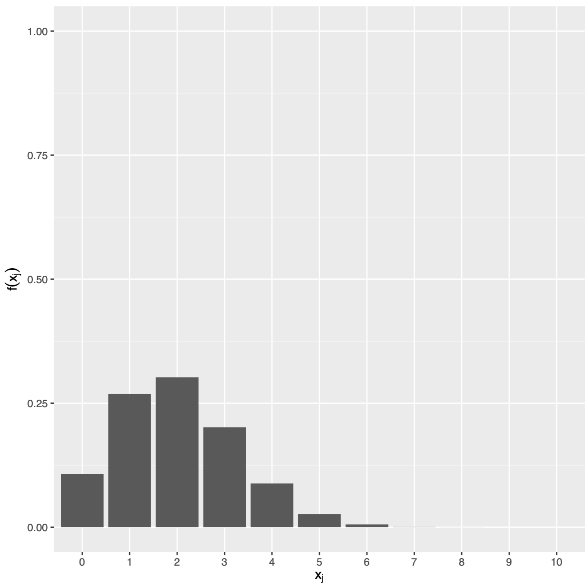
$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \pi(1-\pi) = n\pi(1-\pi)$$

- Standardabweichung:

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung II

n = 10
π = 0.2

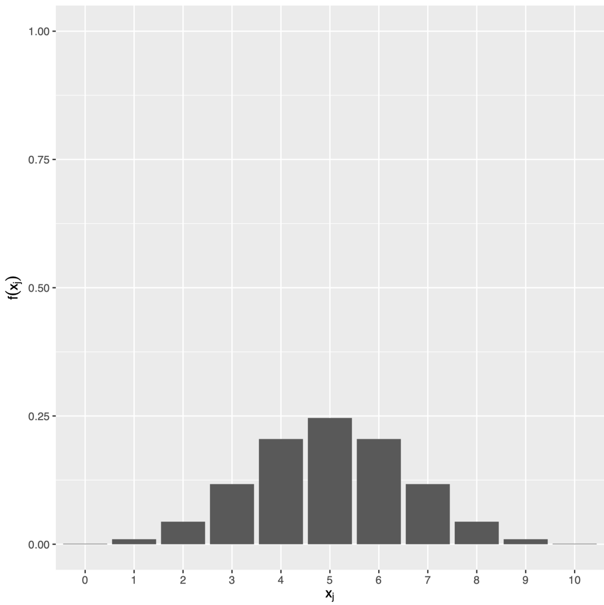


$$E(X) = n\pi = 2$$

$$Var(X) = n\pi(1 - \pi) = 1.6$$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} \approx 1.26$$

n = 10
π = 0.5

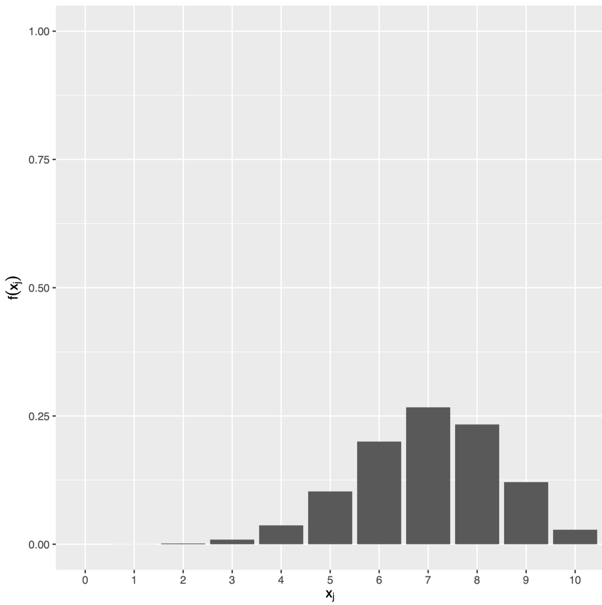


$$E(X) = 5$$

$$Var(X) = 2.5$$

$$SD(X) \approx 1.58$$

n = 10
π = 0.7



$$E(X) = 7$$

$$Var(X) = 2.1$$

$$SD(X) \approx 1.45$$

Beispiel I

- Zufallsexperiment: Faire Münze wird zehn Mal geworfen.
- Die Zufallsvariable *X* steht für die Anzahl Kopf.
- *X* folgt somit einer Binomialverteilung mit Parametern n = 10 und π = 0.5:

$$X \sim B(10, 0.5)$$

- Der Erwartungswert von *X* ist $E(X) = 5$.
- Interpretation: Würden wir unendlich oft zehn faire Münzen werfen, würde im Durchschnitt 5 mal Kopf oben landen.

Beispiel II

- Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X ist

$$f(x_j) = \binom{n}{x_j}\pi^{x_j}(1-\pi)^{n-x_j} = \binom{10}{x_j}0.5^{10}$$

- Damit können wir die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ereignisse berechnen.

- Zum Beispiel:
  - A_{X1} „sieben mal Kopf“:

$$P_X(A_{X1}) = f(7) = \binom{10}{7}0.5^{10} \approx 0.12$$

  - A_{X2} „zwei oder fünf mal Kopf“:

$$P_X(A_{X2}) = f(2) + f(5) = \binom{10}{2}0.5^{10} + \binom{10}{5}0.5^{10} \approx 0.29$$

  - A_{X3} „mindestens acht mal Kopf“:

$$P_X(A_{X3}) = f(8) + f(9) + f(10) = \binom{10}{8}0.5^{10} + \binom{10}{9}0.5^{10} + \binom{10}{10}0.5^{10} \approx 0.05$$

Normalverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion I

- Eine stetige Zufallsvariable X folgt einer **Normalverteilung**, falls ihr Träger aus den gesamten reellen Zahlen besteht, also $T_X = \mathbb{R}$ ist, und ihre Wahrscheinlichkeitsdichte die Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

hat, wobei π hier für die Zahl „Pi“ (≈ 3.14) steht.

- Die Normalverteilung hat zwei Parameter:
  - $\mu \in \mathbb{R}$
  - $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$

- Wenn wir sagen wollen, dass eine ZV X einer Normalverteilung mit Parametern μ und σ^2 folgt, schreiben wir: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Exkurs: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion II

- Konkrete Beispiele für unterschiedliche Werte der Parameter μ und σ^2:

  - $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2}{1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

  - $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)^2}{1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

  - $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

Exkurs: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion III

- Beispiel für die Berechnung einiger Funktionswerte $f(x)$ für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$f(-2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(-2)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-2) = 0.05$$

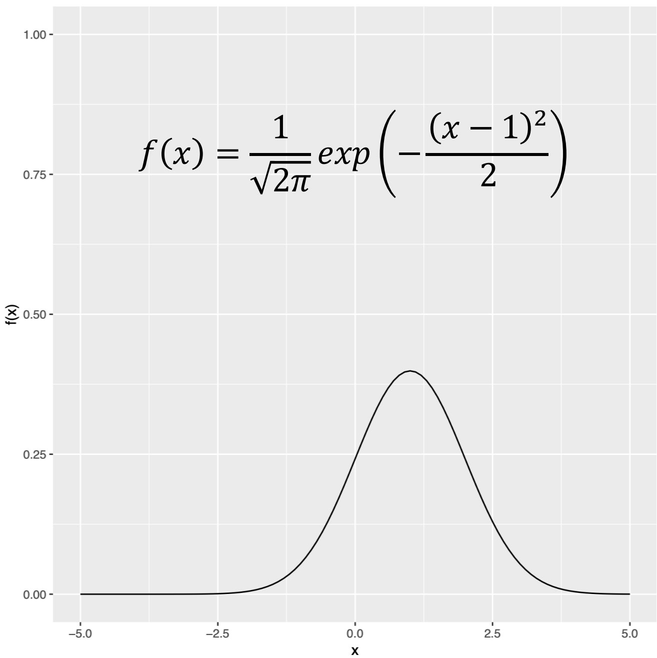
$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.40$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.24$$

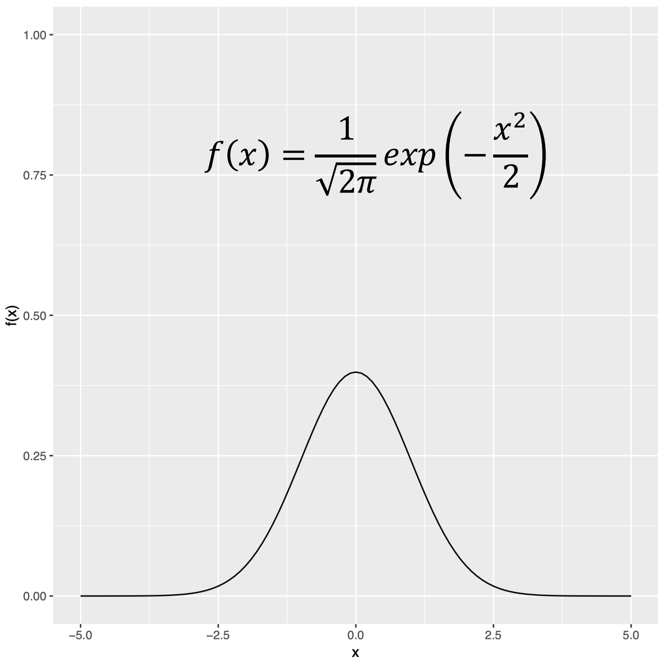
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion IV

- Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen einiger ZVs mit Normalverteilung und unterschiedlichen Werten für die Parameter μ und σ^2:

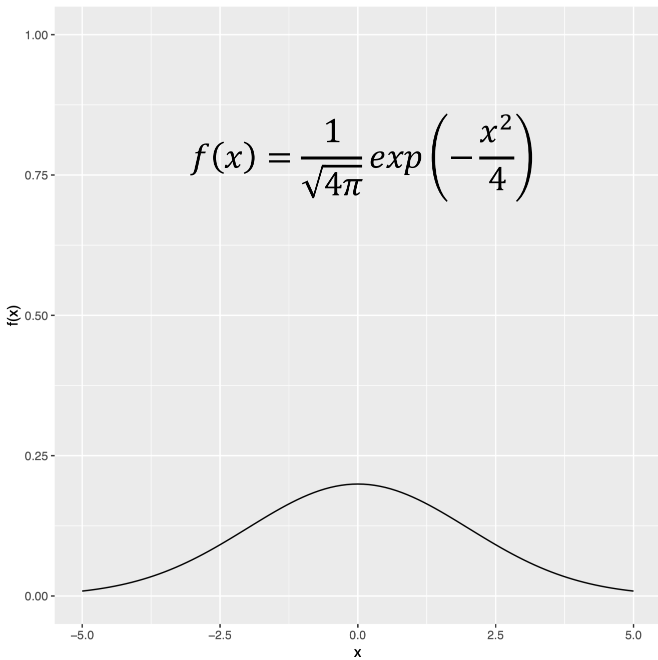
$\mu = 1$ und $\sigma^2 = 1$



$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$



$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 2$



- Der Parameter μ bestimmt, an welcher Stelle der x-Achse sich das Maximum der Dichtefunktion befindet.
- Der Parameter σ^2 legt die „Breite“ der Dichtefunktion fest.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion V

- Wichtige Eigenschaften der Normalverteilung:

- Ihre Dichtefunktion $f(x)$ hat ihr Maximum an der Stelle $x = \mu$.

- Ihre Dichtefunktion $f(x)$ ist symmetrisch um μ, d.h. $f(\mu + c) = f(\mu - c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt unter anderem auch:

    - $P(X \leq \mu - c) = P(X \geq \mu + c)$
    - $P(X \leq \mu) = 0.5$

- Ihre Dichtefunktion hat eine „Glockenform“. Je weiter *x* von μ entfernt ist, desto kleiner ist die Dichte $f(x)$.

Verteilungsfunktion I

- Zur Erinnerung: Bei einer stetigen Zufallsvariable X gilt für die Verteilungsfunktion:

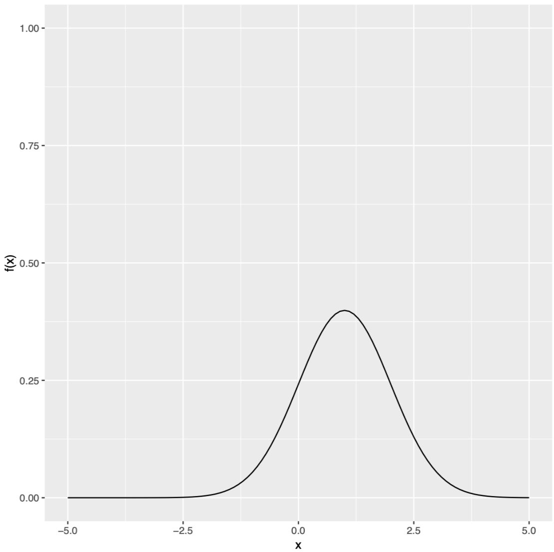
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

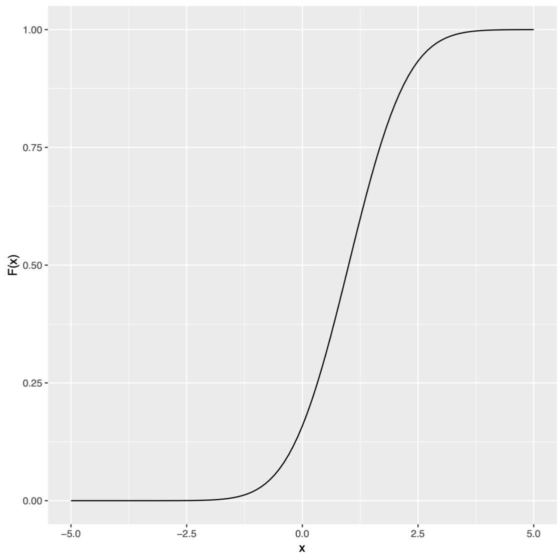
- Die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X ist somit:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dy$$

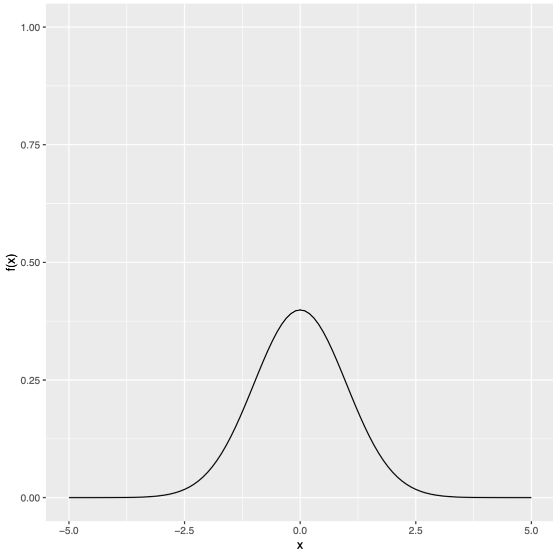
Verteilungsfunktion II

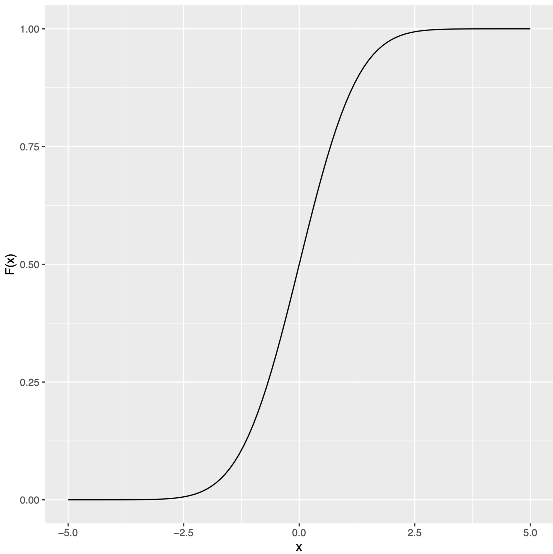
$\mu = 1$ und $\sigma^2 = 1$



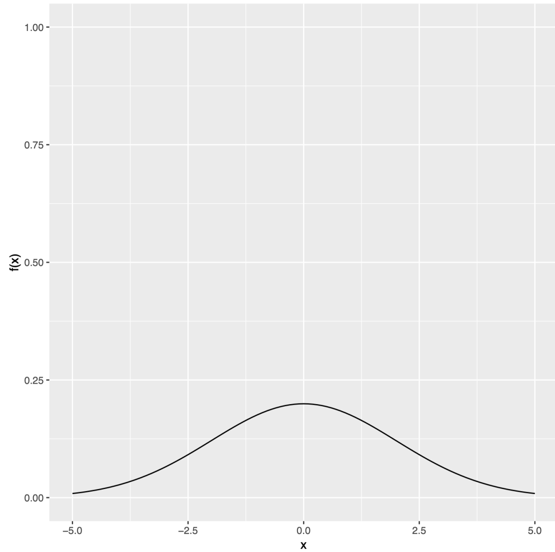


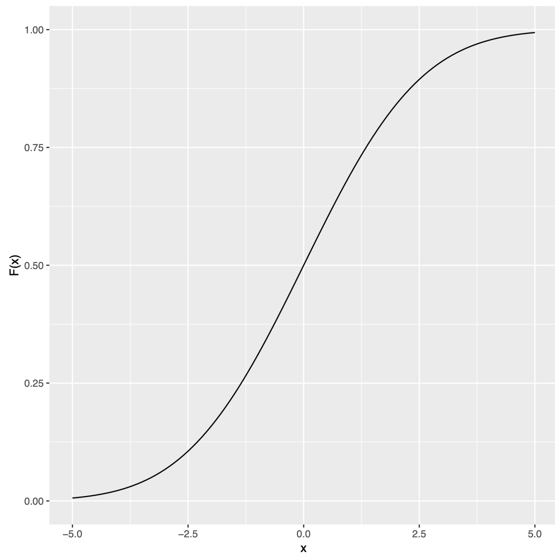
$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$





$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 2$





Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung I

- Der Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable *X* kann aus der allgemeinen Formel für stetige ZVs berechnet werden (sehr aufwendig):

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx = \cdots = \boldsymbol{\mu}$$

- Ebenso die Varianz:

$$\boldsymbol{Var(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - E(X)\big)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \cdots = \boldsymbol{\sigma^2}$$

- Als Standardabweichung ergibt sich

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

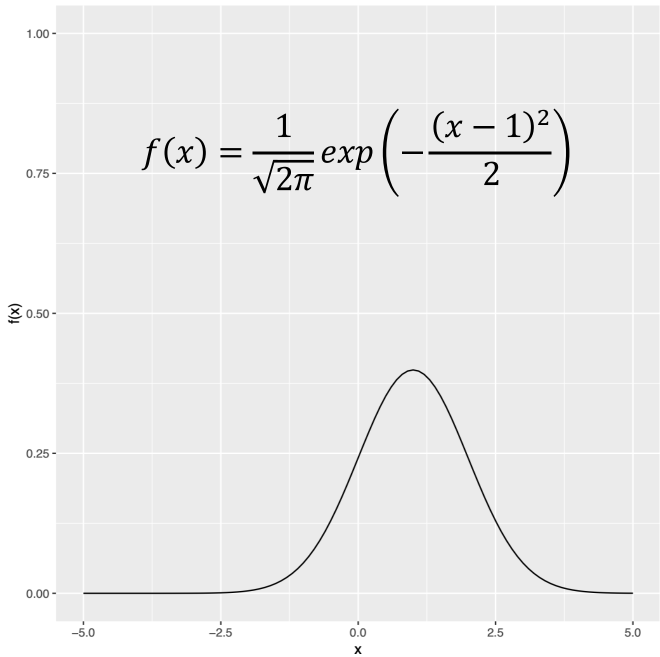
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung II

- Die Parameter μ und σ^2 entsprechen somit dem Erwartungswert und der Varianz der normalverteilten Zufallsvariable *X*.

- Hinweis:
  - Die Schreibweise $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bedeutet implizit eigentlich $X \sim N\big(E(X), Var(X)\big)$ wobei hier $E(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2$ gilt.
  - Sprachlich: „Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2."
  - Später werden wir kombinierte Zufallsvariablen betrachten, die auch normalverteilt sind, deren Erwartungswert und Varianz sich aber teilweise aus mehreren Größen zusammensetzen.

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung III

$\mu = 1$ und $\sigma^2 = 1$

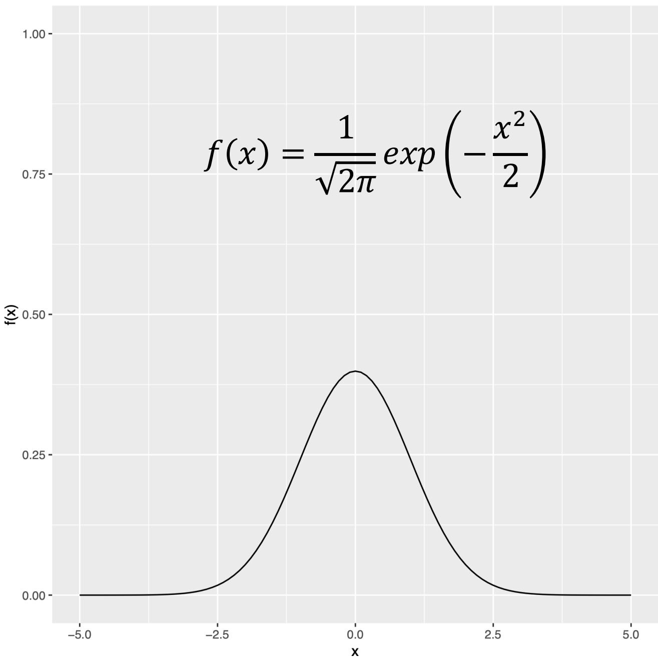


$$E(X) = \mu = 1$$

$$Var(X) = \sigma^2 = 1$$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = 1$$

$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$

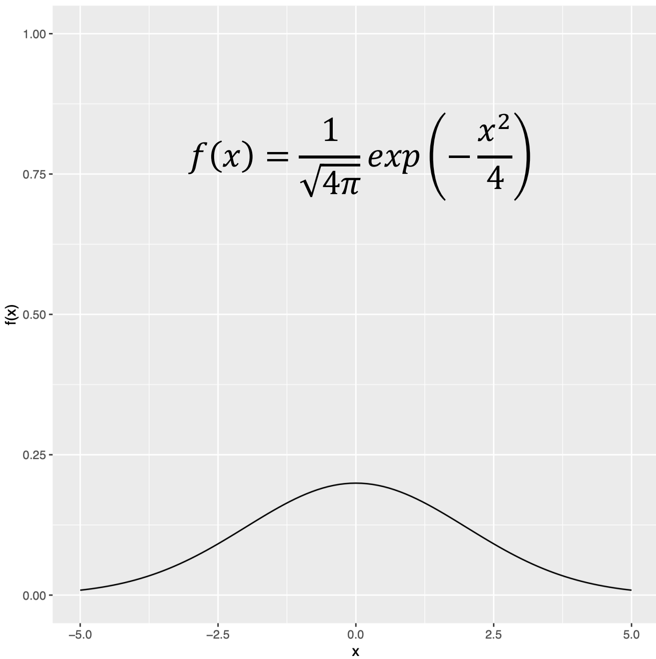


$$E(X) = 0$$

$$Var(X) = 1$$

$$SD(X) = 1$$

$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 2$



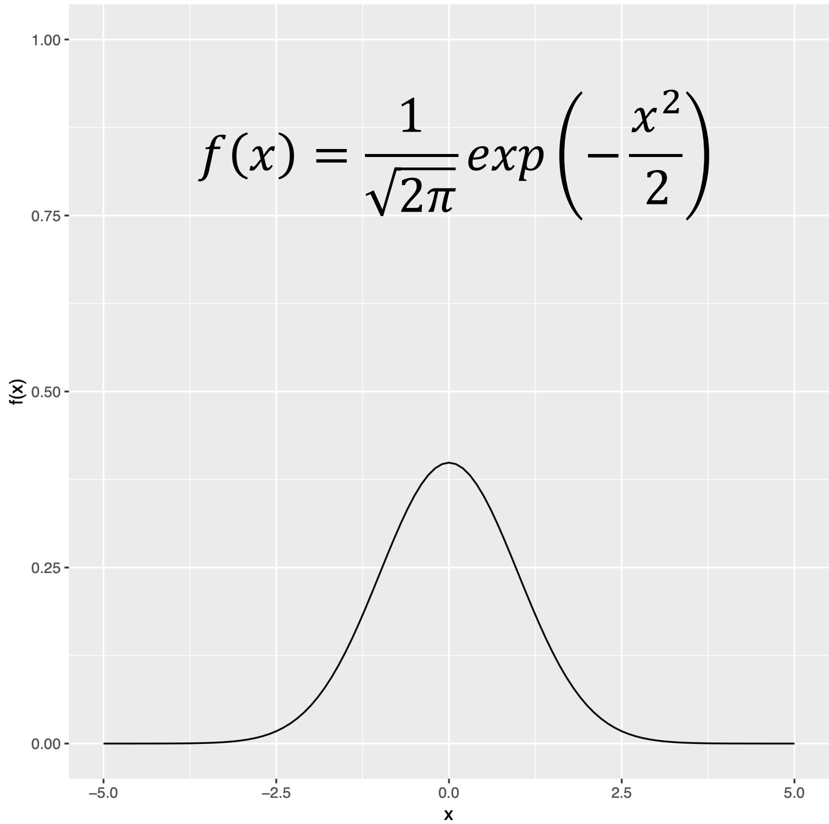
$$E(X) = 0$$

$$Var(X) = 2$$

$$SD(X) = \sqrt{2} \approx 1.41$$

Standardnormalverteilung

- Die Normalverteilung mit den Parameterwerten $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ hat einen eigenen Namen: Sie wird **Standardnormalverteilung** genannt.
- Der Erwartungswert einer standardnormalverteilten ZV *X* ist also $E(X) = \mu = 0$ und die Varianz ist $Var(X) = \sigma^2 = 1$ (und damit auch $SD(X) = \sigma = 1$)
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung:



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

z-Standardisierung und Standardnormalverteilung

- Wendet man die z-Standardisierung auf eine beliebige normalverteilte Zufallsvariable X mit Parametern μ und σ^2 an, ergibt sich eine neue Zufallsvariable *Z*:

$$Z = \frac{X - E(X)}{SD(X)} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Diese neue Zufallsvariable *Z* folgt einer Standardnormalverteilung:

$$Z \sim N(0, 1)$$

  - dass $E(Z) = 0$ und $Var(Z) = 1$ ist, ergibt sich direkt aus der z-Standardisierung.
  - dass Z einer Normalverteilung folgt, ist etwas schwieriger zu beweisen.

- Dies bedeutet, dass jede normalverteilte Zufallsvariable *X* durch z-Standardisierung in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable *Z* überführt werden kann.

- Dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft von normalverteilten Zufallsvariablen, auf die wir in der Inferenzstatistik sehr häufig zurückgreifen werden.

Zwischengliederung

- Bislang:
  - Erwartungswert
  - Varianz und Standardabweichung
  - z-Standardisierung von Zufallsvariablen
  - Konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Jetzt:
  - Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Zufallsvariablen können wie andere Variablen mit Maßzahlen beschrieben werden.
  - Analog zum arithmetischen Mittel ist der Erwartungswert $E(X)$ ein Maß der zentralen Tendenz.
  - Analog zur empirischen Varianz/Standardabweichung ist die Varianz $Var(X)$ bzw. Standardabweichung $SD(X)$ ein Maß der Unterschiedlichkeit (Streuung).
- Zufallsvariablen können wie andere Variablen standardisiert werden um eine neue ZV mit bekanntem Erwartungswert und bekannter Varianz zu erhalten.
- Für praktische Fragestellungen sind folgende konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Zukunft für uns nützlich:

Verteilung	**Parameter**	**Träger**	***Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion***	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{Var(X)}$
Bernoulli	$\pi \in [0,1]$	$T_X = \{0,1\}$	$f(x_j) = \pi^{x_j}(1-\pi)^{1-x_j}$	π	$\pi(1-\pi)$
Binomial	$n \in \mathbb{N}$ $\pi \in [0,1]$	$T_X = \{0,1,\dots,n\}$	$f(x_j) = \binom{n}{x_j}\pi^{x_j}(1-\pi)^{n-x_j}$	$n\pi$	$n\pi(1-\pi)$
Normal	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$	$T_X = \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$	μ	σ^2