Psychologische Testtheorie

Sitzung 10

Reliabilität I

Wahr-oder-Falsch Aussagen zur letzten Sitzung

1. Die Rotation in der EFA überführt die geschätzten Ladungen der Anfangslösung in ein gleichwertiges testtheoretisches Modell, das möglichst nah an der Einfachstruktur liegt.
2. Ihnen liegt folgender R-Output einer EFA vor:
   a) In der EFA wurde mit Varimax rotiert.
   b) Item N2 hat seine Hauptladung auf dem ersten Faktor.
   c) Das Antwortverhalten auf Item N6 wird am schlechtesten durch die drei Faktoren erklärt.
   d) Item N6 verletzt die Einfachstruktur des Modells.
   e) Falls sich der erste Faktor um eine Standardabweichung erhöht, erhöht sich die durchschnittliche Itemantwort auf Item N11 um 0.81 Standardabweichungen.

```
Standardized loadings (pattern matrix)
      ML1   ML2   ML3   h2
N11  0.81              0.68
N9   0.72              0.55
N3   0.70              0.53
N5   0.65              0.51
N7   0.55       -0.18 0.38
N2   0.54        0.32 0.51
N12  0.43              0.22
N1   0.40       -0.27 0.12
N8   0.40  0.20        0.36
N4         0.82        0.64
N10        0.81        0.70
N6   0.28  0.39  0.39 0.70


With factor correlations of
     ML1  ML2  ML3
ML1 1.00 0.77 0.37
ML2 0.77 1.00 0.22
ML3 0.37 0.22 1.00
```

Überblick

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	13.10.25	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	20.10.25	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	
3	27.10.25	Testtheoretische Modelle I	Testtheoretische Modelle
4	03.11.25	Testtheoretische Modelle II	
5	10.11.25	Testtheoretische Modelle III	
6	17.11.25	Skalierung I	Gütekriterien psychologischer Tests
7	24.11.25	Skalierung II	
8	01.12.25	Faktorenanalyse I	
9	08.12.25	Faktorenanalyse II	
10	15.12.25	Reliabilität I	

➛ In der heutigen Vorlesung beschäftigen wir uns mit dem zweiten Hauptgütekriterium, der Reliabilität. Wir beginnen damit die Reliabilität auf Item-Ebene zu betrachten.

1. Einleitung

Wiederholung der Definition

Die **Reliabilität** beschreibt die Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit (DIN 33430), mit der ein psychologischer Test ein Merkmal erfasst.

2. Reliabilität einzelner Items

Vorüberlegungen

- Wir betrachten zunächst ein einzelnes Item X_i eines psychologischen Tests
- Gesucht ist ein Maß für die Genauigkeit dieses Items
- Maße für die Genauigkeit des gesamten psychologischen Tests werden wir in der nächsten Vorlesung besprechen
- Wir wissen, dass für jedes Item gilt:

$$X_i = \tau_i + \varepsilon_i$$

- Dies folgt aus den Axiomen der Klassischen Testtheorie und gilt somit unabhängig davon, welches testtheoretische Modell gilt
- Frage: Welcher Term in dieser Gleichung bestimmt, wie „genau“ bzw. „ungenau“ das Item ist?

Genauigkeit und $Var(\varepsilon_i)$

Antwort: Die Fehlervariable $\boldsymbol{\varepsilon_i}$

- ε_i steht für den **unsystematischen** Teil der Itemantwort
- Erste Idee: Als Maß für die (Un-)Genauigkeit des Items i könnten wir die Varianz $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariable dieses Items verwenden:
  - $VAR(\varepsilon_i)$ klein:
    - geringe Fehlervarianz
    - geringe Abweichungen der Itemantworten vom wahren Wert
    - hohe Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit
  - $VAR(\varepsilon_i)$ groß:
    - große Fehlervarianz
    - große Abweichungen der Itemantworten vom wahren Wert
    - geringe Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit
- Problem: $VAR(\varepsilon_i)$ ist abhängig von der Einheit des Items und hat keinen festen Wertebereich → schwer zu interpretieren

Definition der Reliabilität einzelner Items

Deshalb zweite Idee: Als Maß für die Genauigkeit des Items i könnten wir den Anteil der Varianz der wahren Werte an der Varianz der Itemantwort verwenden:

$$\frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)}$$

- Diese Größe wird **Reliabilität $\boldsymbol{REL(X_i)}$ des Items $\boldsymbol{i}$** genannt
- Interpretation: Die Reliabilität eines Items ist der Anteil der Varianz des systematischen Teils der Itemantwort an der gesamten Varianz der Itemantwort
- Anmerkung: Die Definition der Reliabilität eines Items ist noch unabhängig von dem testtheoretischen Modell, das hinter dem Item steht!

Wertebereich der Reliabilität einzelner Items I

Die Reliabilität hängt mit der Varianz der Fehlervariable zusammen:

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)}$$

Folgerung aus den Axiomen E6: $VAR(X_i) = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)$

- Da $VAR(\tau_i) \geq 0$ und $VAR(X_i) \geq 0$ gilt, ist der erste Bruch – und somit die Reliabilität des Items i – immer ≥ 0
- Da zudem $VAR(\varepsilon_i) \geq 0$ ist, ist der Nenner $VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)$ im zweiten Bruch immer größer als (oder gleich wie) der Zähler $VAR(\tau_i)$. Der ganze zweite Bruch – und somit die Reliabilität des Items i – ist daher immer ≤ 1
- Die Reliabilität eines Items liegt also IMMER zwischen 0 und 1:

$$\mathbf{0 \leq \boldsymbol{REL(X_i)} \leq 1}$$

Wertebereich der Reliabilität einzelner Items II

- Die Reliabilität hängt mit der Varianz der Fehlervariable zusammen:

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)}$$

- Wenn die Varianz $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariable minimal – also gleich 0 – ist, nimmt die Reliabilität den Wert 1 an:

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i) + 0} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i)} = 1$$

- Eine Reliabilität von 1 bedeutet daher, dass die Fehlervariable keine Rolle bei der Beantwortung des Items spielt

  ➢ Je mehr sich die Reliabilität 1 annähert, desto genauer ist das Item

Wertebereich der Reliabilität einzelner Items III

- Die Reliabilität hängt mit der Varianz der Fehlervariable zusammen:

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)}$$

- Je größer die Varianz $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariable wird, desto mehr nähert sich der letzte Bruch – und somit die Reliabilität des Items i – dem Wert 0 an
  - ➢ Je mehr sich die Reliabilität 0 annähert, desto ungenauer ist das Item

Wertebereich der Reliabilität einzelner Items IV

- Die Reliabilität hängt mit der Varianz der Fehlervariable zusammen:

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)}$$

- Fazit:
  - Die Reliabilität eines Items liegt zwischen 0 und 1
  - Je höher die Reliabilität des Items, desto höher seine Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit

Einheitsunabhängigkeit der Reliabilität

- Nehmen wir an, wir ändern die Einheit eines Items X_i und bilden dadurch ein neues Item X_i^*. Dies entspricht mathematisch gesehen einer Multiplikation der Itemantwort X_i mit einer Konstanten *c*: $X_i^* = c \cdot X_i$
  - Bsp.: X_i ist Reaktionszeit in Minuten, X_i^* ist Reaktionszeit in Sekunden. Dann ist *c* = 60.
- Für X_i^* gilt dann wegen $X_i = \tau_i + \varepsilon_i$

$$X_i^* = c \cdot X_i = c \cdot (\tau_i + \varepsilon_i) = \underbrace{c \cdot \tau_i}_{\tau_i^*} + \underbrace{c \cdot \varepsilon_i}_{\varepsilon_i^*}$$

- und wegen den Varianzrechenregeln:

$$REL(X_i^*) = \frac{VAR(\tau_i^*)}{VAR\left(X_i^*\right)} = \frac{VAR(c \cdot \tau_i)}{VAR(c \cdot X_i)} = \frac{c^2 \cdot VAR(\tau_i)}{c^2 \cdot VAR(X_i)} = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = REL(X_i)$$

- **Die Reliabilität eines Items ist somit unabhängig von der Einheit des Items** (das heißt sie bleibt gleich, auch wenn sich die Einheit des Items ändert)

Schätzung der Reliabilität eines Items

- Die Reliabilität eines Items i ist eine unbekannte Größe:

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)}$$

- Wir müssen sie daher mithilfe der Daten aus einer Stichprobe schätzen
- Der Nenner $VAR(X_i)$ ist die Varianz der Itemantwort auf Item i – diese könnten wir einfach durch die empirische Varianz des Items in der Stichprobe schätzen
- Problem: τ_i ist nicht beobachtbar und daher der Zähler $VAR(\tau_i)$ auch nicht direkt schätzbar
- **Lösung:** In Abhängigkeit von dem jeweiligen testtheoretischen Modell, das für die Items gilt, werden wir die Formel für die Reliabilität der Items jeweils so umstellen, dass nur beobachtbare Größen darin vorkommen
- Im Gegensatz zur Definition der Reliabilität ist die **Schätzung** der Reliabilität damit **abhängig von dem testtheoretischen Modell, das für die Items gilt**

2.1. Paralleles Modell

Reliabilität eines Items im parallelen Modell I

- Für die Kovarianz zweier Items im parallelen Modell gilt:

$$COV(X_i, X_j) = VAR(\tau_i) \rightarrow Anhang\ 1$$

- Damit ergibt sich für die Reliabilität eines Items i im parallelen Modell:

siehe oben

umformen

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)} = \frac{COV(X_i, X_j)}{\sqrt{VAR(X_i) \cdot VAR(X_i)}} =$$

$$\frac{COV(X_i, X_j)}{\sqrt{VAR(X_i) \cdot VAR(X_j)}} = COR(X_i, X_j)$$

Folgerung des parallelen Modells:
$\boldsymbol{VAR(X_i) = VAR(X_j)}$
→ siehe Folie 34 in VL03

Reliabilität eines Items im parallelen Modell II

- Die Reliabilität eines Items i entspricht also im parallelen Modell der Korrelation dieses Items mit einem beliebigen anderen Item j:

$$\boldsymbol{REL(X_i) = COR(X_i, X_j)}$$

- Diese Korrelation ist immer noch unbekannt, aber da X_i und X_j beobachtbar sind, kann sie – und somit die Reliabilität – aus den Stichprobendaten geschätzt werden (Details später)
- Aufgrund der Symmetrie der Korrelation gilt:

$$REL(X_i) = COR(X_i, X_j) = COR(X_j, X_i) = REL(X_j)$$

- Das heißt im parallelen Modell haben alle Items die gleiche Reliabilität

2.2. Essentiell paralleles Modell

Reliabilität eines Items im essentiell parallelen Modell I

- Für die Kovarianz zweier Items im essentiell parallelen Modell gilt:

$$COV(X_i, X_j) = VAR(\tau_i) \rightarrow \textit{Anhang 2}$$

- Damit ergibt sich für die Reliabilität eines Items i im essentiell parallelen Modell:

siehe oben

umformen

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} \overset{\text{siehe oben}}{=} \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)} \overset{\text{umformen}}{=} \frac{COV(X_i, X_j)}{\sqrt{VAR(X_i) \cdot VAR(X_i)}} =$$

$$\frac{COV(X_i, X_j)}{\sqrt{VAR(X_i) \cdot VAR(X_j)}} = COR(X_i, X_j)$$

Folgerung des essentiell parallelen Modells:
$\boldsymbol{VAR(X_i) = VAR(X_j)}$
→ siehe Folie 34 in VL03

Reliabilität eines Items im essentiell parallelen Modell II

- Die Reliabilität eines Items i entspricht also auch im essentiell parallelen Modell der Korrelation dieses Items mit einem beliebigen anderen Item j:

$$\boldsymbol{REL(X_i) = COR(X_i, X_j)}$$

- Diese Korrelation ist immer noch unbekannt, aber da X_i und X_j beobachtbar sind, kann sie – und somit die Reliabilität – aus den Stichprobendaten geschätzt werden (Details später)
- Aufgrund der Symmetrie der Korrelation gilt:

$$REL(X_i) = COR(X_i, X_j) = COR(X_j, X_i) = REL(X_j)$$

- Das heißt auch im essentiell parallelen Modell haben alle Items die gleiche Reliabilität

2.3. τ-äquivalentes Modell

Reliabilität eines Items im τ-äquivalenten Modell I

- Für die Kovarianz zweier Items im τ-äquivalenten Modell gilt:

$$COV(X_i, X_j) = VAR(\tau_i) \rightarrow Anhang\ 3$$

- Damit ergibt sich für die Reliabilität eines Items i im τ-äquivalenten Modell:

siehe oben

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)}$$

- Da die Items im τ-äquivalenten Modell unterschiedliche Varianzen $VAR(X_i)$ haben dürfen, können wir hier nicht weiter vereinfachen

Reliabilität eines Items im τ-äquivalenten Modell II

- Die Reliabilität eines Items i entspricht also im τ-äquivalenten Modell der Kovarianz dieses Items mit einem beliebigen anderen Item j geteilt durch seine Varianz:

$$\boldsymbol{REL(X_i) = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)}}$$

- Sowohl Kovarianz als auch Varianz sind immer noch unbekannt, aber da X_i und X_j beobachtbar sind, können sie – und somit die Reliabilität – aus den Stichprobendaten geschätzt werden (Details später)

- Während die Kovarianzen $COV(X_i, X_j)$ im τ-äquivalenten Modell für alle Itempaare gleich sind (siehe Folgerungen), unterscheiden sich die Varianzen der Items:

$$REL(X_i) = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)} \neq \frac{COV(X_j, X_i)}{VAR(X_j)} = REL(X_j)$$

- Das heißt die Items können unterschiedliche Reliabilitäten aufweisen

2.4. Essentiell τ-äquivalentes Modell

Reliabilität eines Items im essentiell τ-äquivalenten Modell I

- Für die Kovarianz zweier Items im essentiell τ-äquivalenten Modell gilt:

$$COV(X_i, X_j) = VAR(\tau_i) \rightarrow \textit{Anhang 4}$$

- Damit ergibt sich für die Reliabilität eines Items i im τ-äquivalenten Modell:

siehe oben

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)}$$

- Da die Items im essentiell τ-äquivalenten Modell unterschiedliche Varianzen $VAR(X_i)$ haben dürfen, können wir hier nicht weiter vereinfachen

Reliabilität eines Items im essentiell τ-äquivalenten Modell II

- Die Reliabilität eines Items i entspricht also auch im essentiell τ-äquivalenten Modell der Kovarianz dieses Items mit einem beliebigen anderen Item j geteilt durch seine Varianz:

$$\boldsymbol{REL(X_i) = \frac{COV\left(X_i, X_j\right)}{VAR(X_i)}}$$

- Sowohl Kovarianz als auch Varianz sind immer noch unbekannt, aber da X_i und X_j beobachtbar sind, können sie – und somit die Reliabilität – aus den Stichprobendaten geschätzt werden (Details später)

- Während die Kovarianzen $COV\left(X_i, X_j\right)$ im essentiell τ-äquivalenten Modell für alle Itempaare gleich sind (siehe Folgerungen), unterscheiden sich die Varianzen der Items:

$$REL(X_i) = \frac{COV\left(X_i, X_j\right)}{VAR(X_i)} \neq \frac{COV\left(X_j, X_i\right)}{VAR\left(X_j\right)} = REL\left(X_j\right)$$

- Das heißt die Items können unterschiedliche Reliabilitäten aufweisen

2.5. τ-kongenerisches Modell

Reliabilität eines Items im τ-kongenerischen Modell I

- Für die Reliabilität eines Items im τ-kongenerischen Modell ergibt sich:

Erste Annahme TK: $\boldsymbol{\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta}$

Varianzrechenregel B3: $\boldsymbol{VAR(X + a) = VAR(X)}$

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\sigma_i + \beta_i \cdot \theta)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR(\beta_i \cdot \theta)}{VAR(X_i)} = \frac{\beta_i^2 \cdot VAR(\theta)}{VAR(X_i)}$$

Varianzrechenregel B4: $\boldsymbol{VAR(a \cdot X) = a^2 \cdot VAR(X)}$

$$= \frac{\beta_i^2}{VAR(X_i)} = \left(\frac{\beta_i}{\sqrt{VAR(X_i)}}\right)^2 = \beta_{zi}^2$$

Normierung TK: $\boldsymbol{VAR(\theta) = 1}$

Umformung

Definition von β_{zil}: $\boldsymbol{\beta_{zil} = \frac{\beta_{il}}{\sqrt{VAR(X_i)}}}$

→ siehe Folie 38 in VL05

Reliabilität eines Items im τ-kongenerischen Modell II

- Die Reliabilität eines Items i entspricht also im τ-kongenerischen Modell dem quadrierten standardisierten Steigungsparameter (bzw. der Ladung) dieses Items:

$$\boldsymbol{REL(X_i) = \beta_{zi}^2}$$

- β_{zi} und β_{zi}^2 - und somit auch die Reliabilitäten der Items können im Rahmen der Faktorenanalyse in R geschätzt werden

2.6. Mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

Reliabilität eines Items im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell I

- Für die Reliabilität eines Items im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell der **Anfangslösung** ergibt sich:

Erste Annahme TK: $\boldsymbol{\tau_i = \sigma_i + \sum_{l=1}^{q} \beta_{il} \cdot \theta_l}$

Varianzrechenregel B3: $\boldsymbol{VAR(X + a) = VAR(X)}$

$$REL(X_i) = \frac{VAR(\tau_i)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR\left(\sigma_i + \sum_{l=1}^{q} \beta_{il} \cdot \theta_l\right)}{VAR(X_i)} = \frac{VAR\left(\sum_{l=1}^{q} \beta_{il} \cdot \theta_l\right)}{VAR(X_i)} =$$

Varianzrechenregel B7:
$\boldsymbol{VAR\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} VAR(X_i)}$

$$\frac{\sum_{l=1}^{q} VAR(\beta_{il} \cdot \theta_l)}{VAR(X_i)} = \frac{\sum_{l=1}^{q} \beta_{il}^2 \cdot VAR(\theta_l)}{VAR(X_i)} = \frac{\sum_{l=1}^{q} \beta_{il}^2}{VAR(X_i)}$$

Varianzrechenregel B4: $\boldsymbol{VAR(a \cdot X) = a^2 \cdot VAR(X)}$

Normierung TK: $\boldsymbol{VAR(\theta_l) = 1}$

Reliabilität eines Items im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell II

- Für die Reliabilität eines Items im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell der **Anfangslösung** ergibt sich:

$$REL(X_i) = \frac{\sum_{l=1}^{q} \beta_{il}^2}{VAR(X_i)}$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \frac{\beta_{il}^2}{VAR(X_i)} = \sum_{l=1}^{q} \left(\frac{\beta_{il}}{\sqrt{VAR(X_i)}} \right)^2 = \sum_{l=1}^{q} \beta_{zil}^2$$

Umformung

Definition von β_{zil}: $\boldsymbol{\beta_{zil}} = \frac{\boldsymbol{\beta_{il}}}{\sqrt{\boldsymbol{VAR(X_i)}}}$

→ siehe Folie 38, VL05

Reliabilität eines Items im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell III

- Die Reliabilität eines Items i entspricht also im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell der Summe der quadrierten standardisierten Steigungsparameter (d.h., der Ladungen) dieses Items über alle Faktoren in der Anfangslösung:

$$\boldsymbol{REL(X_i) = \sum_{l=1}^{q} \beta_{zil}^2}$$

- Da die Summe der quadrierten Ladungen eines Items über alle Faktoren in der Anfangslösung der Kommunalität des Items entspricht, entspricht im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell die Reliabilität eines Items seiner Kommunalität
- Die Kommunalitäten – und somit die Reliabilitäten – der Items können im Rahmen der Faktorenanalyse in R geschätzt werden

Anmerkung: Reliabilität und Rotation

- Die Reliabilität eines Items i könnte im mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modell aus den Ladungen der Mustermatrix nach der Rotation berechnet werden
- In diesem Fall ist die Berechnung etwas schwieriger, da man die quadrierten Ladungen nach der Rotation nicht einfach aufsummieren kann
- Man kann jedoch zeigen, dass die Rotation keine Auswirkungen auf den Wert der Reliabilität der Items hat (Beweis schwierig)
- Daher spricht nichts dagegen, die auf der Anfangslösung basierenden Kommunalitäten für die Berechnung zu verwenden

2.7. Übersicht

Übersicht: Reliabilität einzelner Items

- Paralleles Modell: $REL(X_i) = COR(X_i, X_j)$
- Essentiell paralleles Modell: $REL(X_i) = COR(X_i, X_j)$
- τ-äquivalentes Modell: $REL(X_i) = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)}$
- Essentiell τ- äquivalentes Modell: $REL(X_i) = \frac{COV(X_i, X_j)}{VAR(X_i)}$
- τ-kongenerisches Modell: $REL(X_i) = \beta_{zi}^2$
- Mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell: $REL(X_i) = \sum_{l=1}^{q} \beta_{zil}^2$

Das war‘s schon fast für heute…

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung beschäftigen wir uns mit der Reliabilitätsschätzung auf Ebene eines vollständigen Tests.

- *Aber zuerst:*
  - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
  - Zur Vertiefung:
    - Aufgaben 1-4 im Übungsblatt 7 zur Reliabilität auf Moodle

- *Und natürlich:* ***Ein Frohes Fest und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!***

Anhang 1: Itemreliabilität im parallelen Modell

- Für die Kovarianz zweier Items im parallelen Modell (PM) gilt:

Folgerung aus den Axiomen E1: $\boldsymbol{X_i = \tau_i + \varepsilon_i}$

$$COV(X_i, X_j) = COV(\tau_i + \varepsilon_i, \tau_j + \varepsilon_j) =$$

Kovarianzrechenregel C7: $\boldsymbol{COV(X+Y,Z) = COV(X,Z) + COV(Y,Z)}$

Folgerungen aus den Axiomen E5: $\boldsymbol{COV(\tau_i, \varepsilon_j) = 0}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + COV(\tau_i, \varepsilon_j) + COV(\varepsilon_i, \tau_j) + COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) =$$

Dritte Annahme PM: $\boldsymbol{COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0}$

Erste Annahme PM: $\boldsymbol{\tau_i = \theta}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = COV(\tau_i, \tau_j) = COV(\theta, \theta) = VAR(\theta) = VAR(\tau_i)$$

Kovarianzrechenregel C3: $\boldsymbol{COV(X,X) = VAR(X)}$

Anhang 2: Itemreliabilität im essentiell parallelen Modell

- Für die Kovarianz zweier Items im essentiell parallelen Modell (EP) gilt:

Folgerung aus den Axiomen E1: $\boldsymbol{X_i = \tau_i + \varepsilon_i}$

$$COV(X_i, X_j) = COV(\tau_i + \varepsilon_i, \tau_j + \varepsilon_j) =$$

Kovarianzrechenregel C7: $\boldsymbol{COV(X+Y,Z) = COV(X,Z) + COV(Y,Z)}$

Folgerungen aus den Axiomen E5: $\boldsymbol{COV(\tau_i, \varepsilon_j) = 0}$

Dritte Annahme EP: $\boldsymbol{COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + COV(\tau_i, \varepsilon_j) + COV(\varepsilon_i, \tau_j) + COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) =$$

Erste Annahme EP: $\boldsymbol{\tau_i = \sigma_i + \theta}$

Kovarianzrechenregeln C3: $\boldsymbol{COV(X,X) = VAR(X)}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = COV(\tau_i, \tau_j) = COV(\sigma_i + \theta, \sigma_j + \theta) = COV(\theta, \theta) =$$

Kovarianzrechenregeln C6: $\boldsymbol{COV(X+a,Y) = COV(X,Y)}$

Erste Annahme EP: $\boldsymbol{\tau_i = \sigma_i + \theta \;\rightarrow \theta = \tau_i - \sigma_i}$

$$VAR(\theta) = VAR(\tau_i - \sigma_i) = VAR(\tau_i)$$

Varianzrechenregel B3: $\boldsymbol{VAR(X+a) = VAR(X)}$

Anhang 3: Itemreliabilität im τ-äquivalenten Modell

- Für die Kovarianz zweier Items im τ-äquivalenten Modell (TÄ) gilt wie im PM:

Folgerung aus den Axiomen E1: $\boldsymbol{X_i = \tau_i + \varepsilon_i}$

$$COV(X_i, X_j) = COV(\tau_i + \varepsilon_i, \tau_j + \varepsilon_j) =$$

Kovarianzrechenregel C7: $\boldsymbol{COV(X+Y,Z) = COV(X,Z) + COV(Y,Z)}$

Folgerungen aus den Axiomen E5: $\boldsymbol{COV(\tau_i, \varepsilon_j) = 0}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + COV(\tau_i, \varepsilon_j) + COV(\varepsilon_i, \tau_j) + COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) =$$

Zweite Annahme TÄ: $\boldsymbol{COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0}$

Erste Annahme TÄ: $\boldsymbol{\tau_i = \theta}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = COV(\tau_i, \tau_j) = COV(\theta, \theta) = VAR(\theta) = VAR(\tau_i)$$

Kovarianzrechenregel C3: $\boldsymbol{COV(X,X) = VAR(X)}$

Anhang 4: Itemreliabilität im essentiell τ-äquivalenten Modell

- Für die Kovarianz zweier Items im essentiell τ-äquivalenten Modell (ET) gilt wie im EP:

Folgerung aus den Axiomen E1: $\boldsymbol{X_i = \tau_i + \varepsilon_i}$

$$COV(X_i, X_j) = COV(\tau_i + \varepsilon_i, \tau_j + \varepsilon_j) =$$

Kovarianzrechenregel C7: $\boldsymbol{COV(X+Y,Z) = COV(X,Z) + COV(Y,Z)}$

Folgerungen aus den Axiomen E5: $\boldsymbol{COV(\tau_i, \varepsilon_j) = 0}$

Zweite Annahme ET: $\boldsymbol{COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + COV(\tau_i, \varepsilon_j) + COV(\varepsilon_i, \tau_j) + COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) =$$

Erste Annahme ET: $\boldsymbol{\tau_i = \sigma_i + \theta}$

Kovarianzrechenregeln C3: $\boldsymbol{COV(X,X) = VAR(X)}$

$$= COV(\tau_i, \tau_j) + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = COV(\tau_i, \tau_j) = COV(\sigma_i + \theta, \sigma_j + \theta) = COV(\theta, \theta) =$$

Kovarianzrechenregeln C6: $\boldsymbol{COV(X+a,Y) = COV(X,Y)}$

Erste Annahme ET: $\boldsymbol{\tau_i = \sigma_i + \theta \;\rightarrow \theta = \tau_i - \sigma_i}$

$$VAR(\theta) = VAR(\tau_i - \sigma_i) = VAR(\tau_i)$$

Varianzrechenregel B3: $\boldsymbol{VAR(X+a) = VAR(X)}$