Lehrstuhl für Psychologische Methodenlehre und Diagnostik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

Psychologische Testtheorie

Sitzung 2

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Wahr-oder-Falsch Aussagen zur letzten Sitzung

1. Ein psychologischer Test ist ein wissenschaftliches Routineverfahren zur Erfassung psychologischer Phänomene.

2. Ein psychologischer Test besteht aus mehreren Fragen oder Aufgaben, die als Items bezeichnet werden.

3. Bei den Variablen *Haarfarbe*, *höchster Schulabschluss* und *Anzahl der TikTok-Followern* handelt es sich um latente Variablen.

4. Bei den Variablen *Beliebtheit im Freundeskreis*, *Geiz* und *politische Orientierung* handelt es sich um manifeste Variablen.

5. Die Antworten einer Person auf die Items eines Tests sind latente Variablen.

6. Testtheoretische Modelle bestehen aus mathematischen Gleichungen, die angeben, wie latente Variablen das Antwortverhalten auf manifesten Variablen kausal erzeugen.

Überblick

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	14.10.24	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	21.10.24	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	

➛ In der heutigen Vorlesung werden wir uns genauer damit beschäftigen, wie wir Antwortverhalten von Personen auf manifesten Variablen – zunächst noch ohne Bezug zu latenten Variablen – mathematisch mithilfe von Zufallsvariablen beschreiben können

Teil 1: Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen

1. Wahrscheinlichkeitstheorie

(Wiederholung aus Statistik I)

Zufallsexperiment

- **Zufallsexperiment** = Vorgang, der mehr als einen möglichen Ausgang (= Ergebnis) haben kann und bei dem wir vorher nicht wissen, welcher dieser Ausgänge eintreten wird.
- Beispiele:
  - Würfelwurf
  - Ziehen einer Person aus einer Population

Zufallsvariable I

- **Zufallsvariable** = Funktion, die für einen bestimmten, in Zahlen ausdrückbaren Aspekt eines Zufallsexperiments steht
  - Würfelwurf: Augen auf dem Würfel ➛ X_{Augen}
  - Ziehen einer Person aus einer Population: Größe der Person ➛ $X_{Größe}$
- Nach Ablauf des Zufallsexperiments nimmt jede Zufallsvariable X je nach Ausgang einen Wert x an. Diesen Wert nennt man **Realisation**.
  - Würfelwurf: Drei Augen ➛ X_{Augen} hat sich in dem Wert $x_{Augen} = 3$ realisiert
  - Ziehen einer Person aus einer Population: Person ist 170cm groß ➛ $X_{Größe}$ hat sich in dem Wert $x_{Größe} = 170$ realisiert

Zufallsvariable II

- Man unterscheidet zwischen **diskreten** und **stetigen** Zufallsvariablen
  - Diskrete Zufallsvariablen können endlich viele Werte annehmen
    - Beispiel: Augen auf dem Würfel
  - Stetige Zufallsvariablen können (überabzählbar) unendlich viele Werte annehmen
    - Beispiel: Größe einer zufällig gezogenen Person
- Für Zufallsvariablen gelten die Rechenregeln im Anhang 1

Erwartungswert

- Definition für diskrete Zufallsvariablen:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f(x_j) \qquad \text{(A1a)}$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die möglichen Realisationen der Zufallsvariable X sind und *f* ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion

- Definition für stetige Zufallsvariablen:

$$E(X) = \int x \cdot f(x)\, dx \qquad \text{(A1b)}$$

wobei *f* die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X ist

- Interpretation: „Wenn man das der Zufallsvariable X zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und den Mittelwert aus allen Realisationen der Zufallsvariable berechnen würde, wäre dies der Erwartungswert."

2. Itemantworten als Zufallsvariablen

2. Itemantworten als Zufallsvariablen

2.1. Feste (konkrete) Person

2.2. Zufällig gezogene Person

Itemantworten als Zufallsvariablen

- Situation: Eine Person sitzt vor uns (deswegen **„feste“ Person**) und antwortet auf mehrere Items eines psychologischen Tests mit insgesamt k Items
- Dieser Vorgang ist ein Zufallsexperiment, denn wir können das Verhalten der Person in dem Test nicht vorhersagen
- Die Antwort auf jedes der k Items des Tests ist eine Zufallsvariable $\mathbf{X_{iPerson}}$ mit $i = 1, 2, \dots, k$ (d.h., für jedes Item eine Zufallsvariable)
  - $X_{1Person}$ steht für die Antwort der Person auf Item 1
  - $X_{2Person}$ steht für die Antwort der Person auf Item 2
  - usw.
- Wenn die Person z.B. bei Item 1 den Wert 3 ankreuzt, dann realisiert sich die Zufallsvariable $X_{1Person}$ in dem Wert $x_{1Person} = 3$

Ich bin aktiv.

○ *Starke Ablehnung* ○ *Ablehnung* ⊗ *Neutral* ○ *Zustimmung* ○ *Starke Zustimmung*

Wahrer Wert der Person / Erwartungswert von $X_{iPerson}$

- Da die Itemantworten $X_{iPerson}$ Zufallsvariablen sind, haben sie auch jeweils (d.h., für jedes Item) einen **Erwartungswert** $\boldsymbol{E(X_{iPerson})}$ und eine **Varianz** $\boldsymbol{VAR(X_{iPerson})}$
- Wir erinnern uns an die Interpretation des Erwartungswertes: Wenn man das der Zufallsvariable $X_{iPerson}$ zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und den Mittelwert aus allen Realisationen der Zufallsvariable berechnen würde, wäre dies der Erwartungswert
- Das heißt: Wenn die Person unendlich oft auf das Item i antworten würde, dann wäre $E(X_{iPerson})$ der Mittelwert dieser Itemantworten!
  Dieser Mittelwert ist ein konstanter Wert, z.B. $E(X_{iPerson}) = 3.7$
- Der Erwartungswert $E(X_{iPerson})$ wird in der Testtheorie auch als **wahrer Wert** der Person auf Item i genannt und mit $\boldsymbol{\tau_{iPerson}}$ bezeichnet
- Er kann als „durchschnittliche Itemantwort“ der Person auf dem Item i aufgefasst werden

Varianz von $X_{iPerson}$

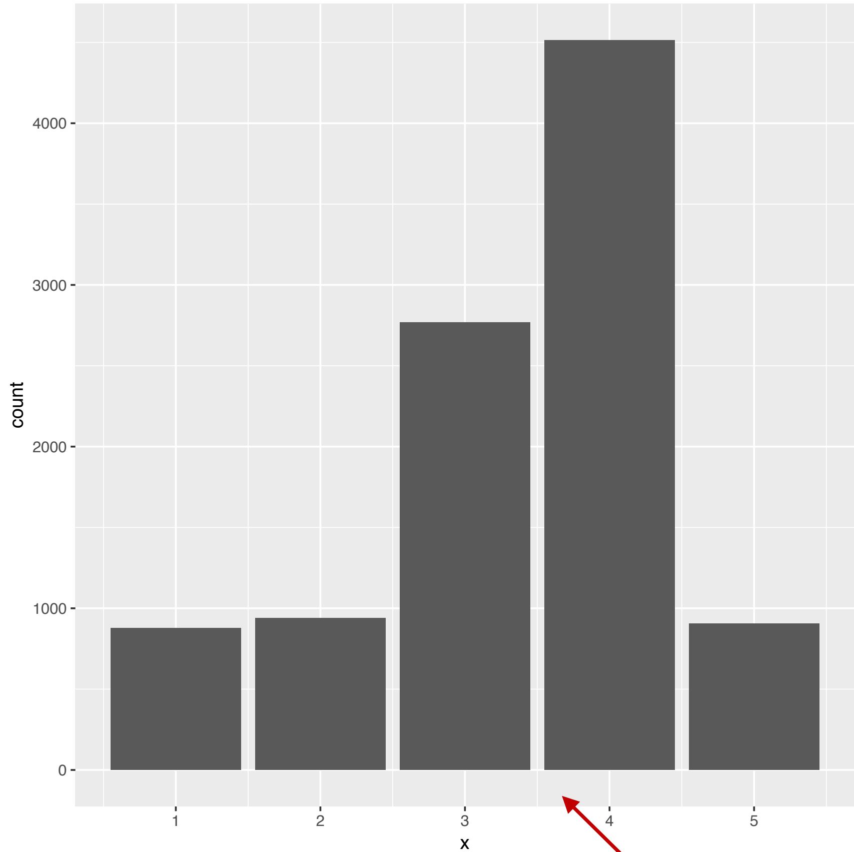
- Analog ist $\boldsymbol{VAR}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{iPerson}})$ die Varianz der Itemantworten der Person, wenn sie unendlich oft auf das Item i antwortet
- Diese Varianz ist ein Maß dafür, wie stark die Antworten der Person auf Item i variieren
  - Ist die Varianz groß, bedeutet dies, dass die Person bei mehrmaliger Beantwortung des Items <u>sehr unterschiedliche</u> Antworten geben würde
  - Ist die Varianz klein, bedeutet dies, dass die Person bei mehrmaliger Beantwortung des Items <u>sehr ähnliche</u> Antworten geben würde
  - Im Extremfall von $VAR(X_{iPerson}) = 0$ würde die Person bei Item i jedes Mal dasselbe ankreuzen (sehr unrealistisch bei Items eines psychologischen Tests)

Grafische Veranschaulichung

Balkendiagramm der Itemantworten einer Person bei sehr häufiger Beantwortung desselben Items:

Ich bin aktiv.

○ *Starke Ablehnung* ○ *Ablehnung* ○ *Neutral* ○ *Zustimmung* ○ *Starke Zustimmung*



$\tau_{iPerson} = 3.7$

Wichtige Anmerkungen

- Jede Person hat auf jedem Item i eines psychologischen Tests einen eigenen wahren Wert ➛ Die Anzahl der wahren Werte entspricht der Anzahl der Items!
- Unterschiedliche Personen können auf denselben Items unterschiedliche wahre Werte haben!
  - z.B. könnte Person 1 bei Item 1 einen wahren Wert $\tau_{1Person1} = 3$ haben und bei Item 2 einen wahren Wert $\tau_{2Person1} = 2.4$
  - Person 2 hingegen könnte bei Item 1 einen wahren Wert $\tau_{1Person2} = 2.1$ haben und bei Item 2 einen wahren Wert $\tau_{2Person2} = 1.2$
- Die wahren Werte haben erst einmal noch nichts mit latenten Variablen zu tun. Sie sind einfach nur die Erwartungswerte der manifesten Itemantworten einer Person!
- In der Praxis kennen wir die wahren Werte einer Person nicht ➛ Sie sind unbekannte Größen!
- Meistens haben wir lediglich jeweils eine Realisation von $X_{iPerson}$ für jedes Item vorliegen (= die einmalige Antwort der Person auf das Item)

2. Itemantworten als Zufallsvariablen

2.1. Feste (konkrete) Person

2.2. Zufällig gezogene Person

Zufällig gezogene Person I

- Die bisherigen Überlegungen gingen von einer festen Person aus
- Sehr häufig haben wir aber Itemantworten von zufällig aus einer Population in eine Stichprobe gezogenen Personen vorliegen
- Wir müssen uns also auch damit beschäftigen, wie wir das Antwortverhalten von zufällig gezogenen Personen mithilfe von Zufallsvariablen darstellen können

Zufällig gezogene Person II

- Situation: Eine Person wird **zufällig aus einer Population gezogen** und antwortet auf mehrere Items eines psychologischen Tests mit insgesamt k Items
- Auch dieser Vorgang ist ein Zufallsexperiment: Wir können vorher weder wissen, welche Person aus der Population gezogen werden wird, noch welches Verhalten diese Person in dem Test zeigen wird!
- Die Antwort der zufällig gezogenen Person auf jedes der k Items des Tests ist eine Zufallsvariable $\mathbf{X_i}$, mit $i = 1, 2, \dots, k$ (statt $X_{iPerson}$ wie auf Folie #12)
  - X_1 steht für die Antwort der zufällig gezogenen Person auf Item 1
  - X_2 steht für die Antwort derselben zufällig gezogenen Person auf Item 2
  - usw.
- Wenn die zufällig gezogene Person z.B. bei Item 1 den Wert 3 ankreuzt, dann realisiert sich die Zufallsvariable X_1 in dem Wert $x_1 = 3$

Ich bin aktiv.

Starke Ablehnung	Ablehnung	Neutral	Zustimmung	Starke Zustimmung
○	○	☒	○	○

„Doppeltes" Zufallsexperiment

- Man kann das gerade beschriebene Zufallsexperiment auch als zwei hintereinander durchgeführte Zufallsexperimente auffassen, also als „doppeltes" Zufallsexperiment:
  - „Erstes" Zufallsexperiment: Eine Person wird zufällig gezogen
  - „Zweites" Zufallsexperiment: Diese Person bearbeitet den Test
- Das „zweite" Zufallsexperiment ist identisch mit dem in den Folien zu 2.1. beschriebenen Zufallsexperiment, in dem **eine feste (also nicht zufällig gezogene) Person** den Test bearbeitet. Nachdem das „erste" Zufallsexperiment durchgeführt wurde, ist die Person ja schon gezogen und daher nicht mehr zufällig, sondern fest.
- Die Itemantworten des „zweiten" Zufallsexperiments könnten wieder durch die Zufallsvariablen $X_{iPerson}$ beschrieben werden

Zufälliger wahrer Wert

- Wir definieren nun eine weitere Zufallsvariable, die für einen für uns wichtigen Aspekt des „ersten“ Zufallsexperiments steht
- Nach dem Ablauf des „ersten“ Zufallsexperiments haben wir eine feste Person vor uns, die auf jedem Item i einen festen wahren Wert $\tau_{iPerson}$ hat
- Vor dem Ablauf des „ersten“ Zufallsexperiments können wir nicht vorhersagen, welche wahren Werte $\tau_{iPerson}$ die von uns gezogene Person haben wird, denn die Ziehung der Person ist ja zufällig
- Die wahren Werte der Person $\tau_{iPerson}$ realisieren sich somit erst im Laufe des „ersten“ Zufallsexperiments
- Wir können also für jedes Item i eine Zufallsvariable definieren, deren Realisation der feste wahre Wert $\tau_{iPerson}$ der gezogenen Person auf diesem Item ist
- Diese Zufallsvariablen nennen wir **zufällige wahre Werte τ_i**

Zusammenfassung „Doppeltes“ Zufallsexperiment

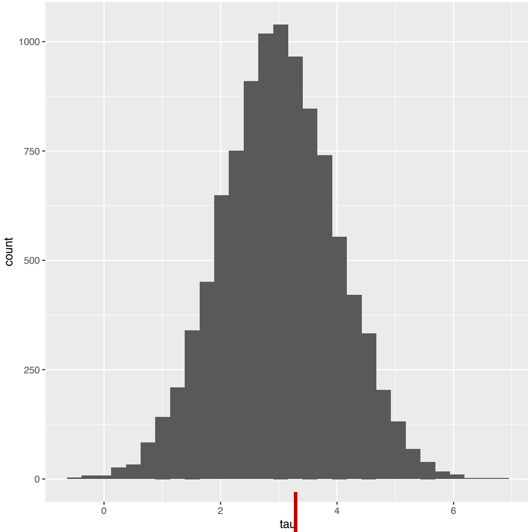
- „Erstes“ Zufallsexperiment
  - Eine Person wird zufällig aus der Population gezogen
  - Diese Person hat für jedes Item des Tests einen wahren Wert $\tau_{iPerson}$
  - Dieser Vorgang wird durch die Zufallsvariable **zufällige wahre Werte $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{i}$** beschrieben, welche sich in den wahren Werten $\tau_{iPerson}$ realisieren
- „Zweites“ Zufallsexperiment
  - Diese Person bearbeitet den Test und antwortet auf die Items
  - Dieser Vorgang wird durch die Zufallsvariablen **Itemantworten $\mathbf{X}_{\mathbf{iPerson}}$** beschrieben, welche sich in den Werten $x_{\mathrm{i}Person}$ realisieren
- Die Itemantworten des „doppelten“ Zufallsexperiments (also „erstes“ und „zweites“ zusammen) werden durch die Zufallsvariablen X_i beschrieben, die sich in den tatsächlichen Itemantworten x_i der zufällig gezogenen Person realisieren

Grafische Veranschaulichung

Beispiel 1 für einen möglichen Ablauf des „doppelten“ Zufallsexperiments – ein Item

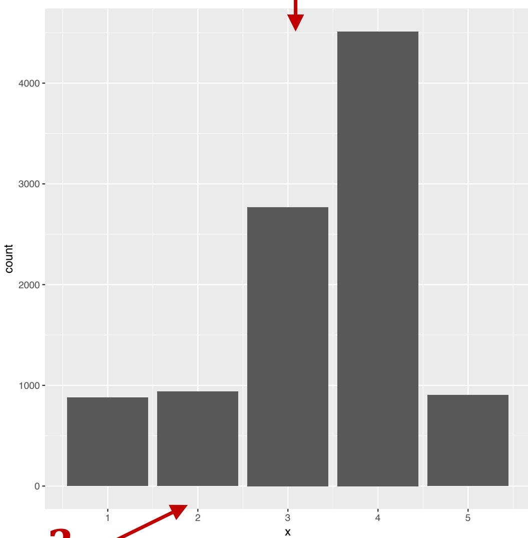
Verteilung der wahren Werte $\tau_{iPerson}$ in der Population

$\boldsymbol{X_i}$



$\boldsymbol{\tau_i}$

$\boldsymbol{\tau_{iPerson} = 3.7}$

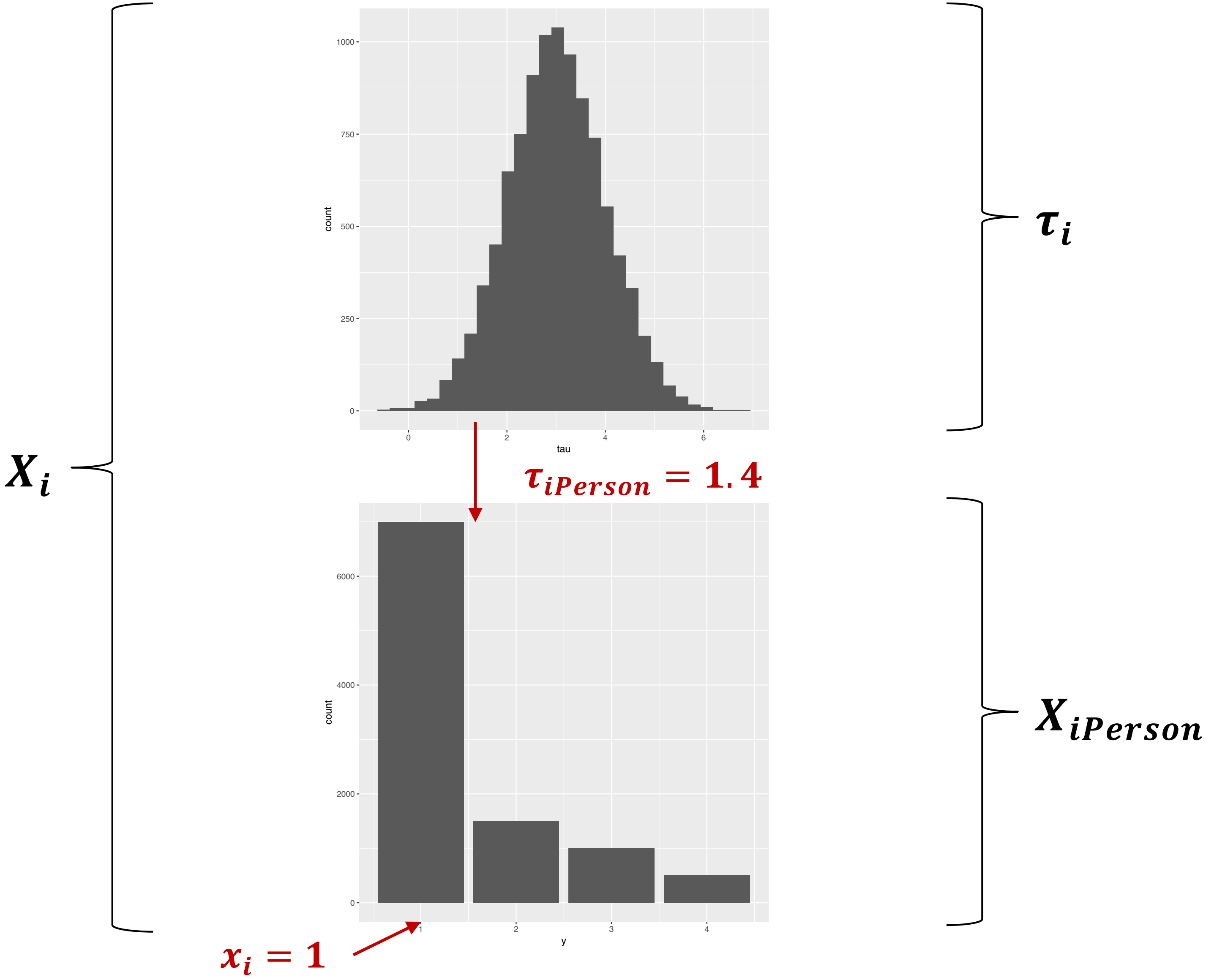


$\boldsymbol{X_{iPerson}}$

$\boldsymbol{x_i = 2}$

Grafische Veranschaulichung

Beispiel 2 für einen möglichen Ablauf des „doppelten“ Zufallsexperiments – ein Item



Wichtige Anmerkungen

- Die τ_i sind im Gegensatz zu den $\tau_{iPerson}$ keine Konstanten, sondern Zufallsvariablen
- Jedes Item i eines psychologischen Tests hat einen eigenen zufälligen wahren Wert τ_i. Die Anzahl der zufälligen wahren Werte τ_i entspricht der Anzahl der Items
- Die zufälligen wahren Werte τ_i haben erst einmal noch nichts mit latenten Variablen zu tun. Sie sind nichts anderes als die Zufallsvariablen, deren Realisationen die wahren Werte $\tau_{iPerson}$ der gezogenen Person sind

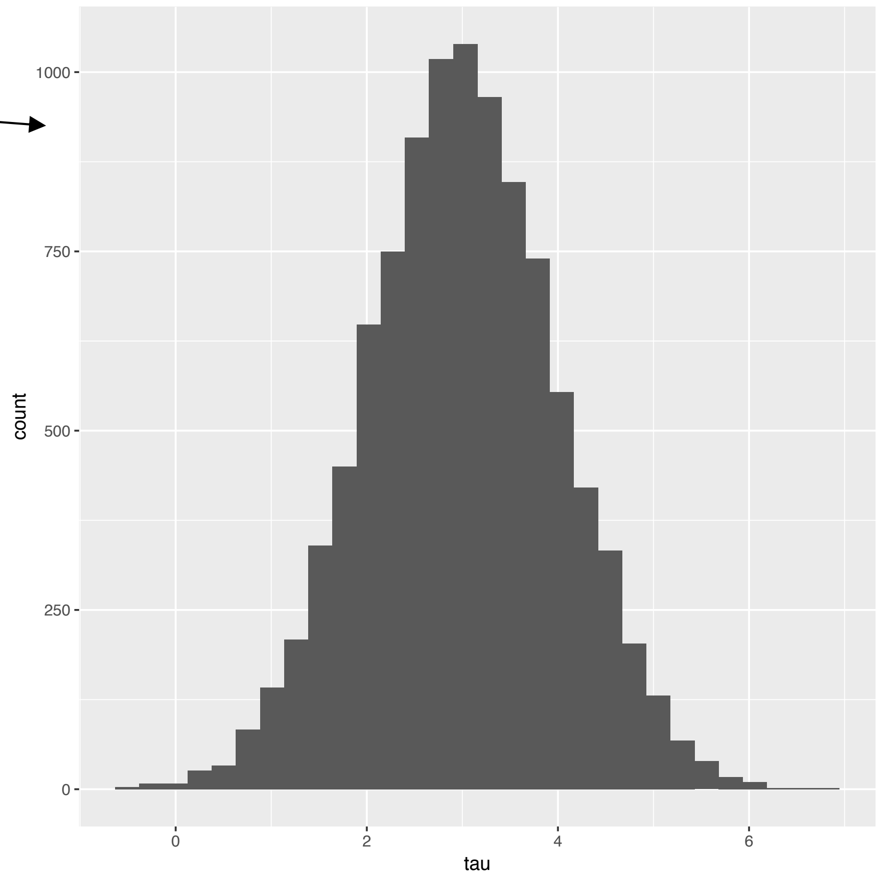
Erwartungswert von τ_i

- Da die zufälligen wahren Werte τ_i Zufallsvariablen sind, haben sie auch jeweils (also für jedes Item) einen **Erwartungswert** $\mathbf{E(\tau_i)}$ und eine **Varianz** $\mathbf{VAR(\tau_i)}$
- Wir erinnern uns an die Interpretation des Erwartungswertes: Wenn man das der Zufallsvariable τ_i zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und den Mittelwert aus allen Realisationen der Zufallsvariable berechnen würde, wäre dies der Erwartungswert
- Das heißt: Wenn wir unendlich viele Personen aus der Population ziehen würden (vereinfacht gesagt: die komplette Population) und bei jeder gezogenen Person den wahren Wert $\tau_{iPerson}$ für Item i bestimmen würden (falls dies möglich wäre), dann wäre $E(\tau_i)$ der Mittelwert dieser wahren Werte
- Wir können also $E(\tau_i)$ als Mittelwert der wahren Werte für Item i in der Population interpretieren

Varianz von τ_i

- Analog ist $\mathbf{VAR}(\boldsymbol{\tau}_\mathbf{i})$ die Varianz der wahren Werte $\tau_{iPerson}$ auf Item i in der Population, also ein Maß dafür, wie stark sich die Personen in der Population in ihren wahren Werten auf diesem Item unterscheiden

Verteilung der wahren Werte $\tau_{iPerson}$ in der Population



Erwartungswert, Varianz und Kovarianz von X_i

- Wir kommen nun zurück zu den Zufallsvariablen X_i, die für die Itemantworten einer zufälligen Person stehen
- Auch hier können wir einige interessante Größen betrachten
  - $E(X_i)$ - Der Erwartungswert der Antwort einer zufällig gezogenen Person auf Item i
  - $VAR(X_i)$ - Die Varianz der Antwort einer zufällig gezogenen Person auf Item i
  - $COV(X_i, X_j)$ - Die Kovarianz der Antworten einer zufällig gezogenen Person auf Item i und auf Item j
- Diese Größen sind unbekannt!
- Wenn wir jedoch eine Stichprobe von mehreren zufälligen Personen gezogen haben, können wir sie durch die entsprechenden Stichprobengrößen schätzen:
  - $E(X_i)$ durch den beobachteten Mittelwert der Antworten auf Item i
  - $VAR(X_i)$ durch die beobachtete Varianz der Antworten auf Item i
  - $COV(X_i, X_j)$ durch die beobachtete Kovarianz der Antworten auf Item i und Item j

Beispiel I

Fünf zufällig gezogene Personen haben einen Test mit zwei Items bearbeitet:

	Item 1	Item 2
Person 1	1	2
Person 2	3	4
Person 3	1	3
Person 4	5	5
Person 5	4	3

- Der Mittelwert von Item 1 ist $\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} = \frac{1+3+1+5+4}{5} = 2.8$

  ➢ Der Schätzwert für $E(X_1)$ ist somit 2.8

- Der Mittelwert von Item 2 ist $\bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} = \frac{2+4+3+5+3}{5} = 3.4$

  ➢ Der Schätzwert für $E(X_2)$ ist somit 3.4

Beispiel II

Fünf zufällig gezogene Personen haben einen Test mit zwei Items bearbeitet:

	Item 1	Item 2
Person 1	1	2
Person 2	3	4
Person 3	1	3
Person 4	5	5
Person 5	4	3

- Die Varianzen von Item 1 und Item 2 sind:
  - $var_{x1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = \frac{(1-2.8)^2+(3-2.8)^2+(1-2.8)^2+(5-2.8)^2+(4-2.8)^2}{4} = 3.2$
  - $var_{x2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = \frac{(2-3.4)^2+(4-3.4)^2+(3-3.4)^2+(5-3.4)^2+(3-3.4)^2}{4} = 1.3$
- Der Schätzwert für $VAR(X_1)$ ist somit 3.2 und der Schätzwert für $VAR(X_2)$ ist 1.3

Beispiel III

Fünf zufällig gezogene Personen haben einen Test mit zwei Items bearbeitet:

	Item 1	Item 2
Person 1	1	2
Person 2	3	4
Person 3	1	3
Person 4	5	5
Person 5	4	3

- Die Kovarianz zwischen Item 1 und Item 2 ist

$$cov(x_1, x_2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)\,(x_{i2} - \bar{x}_2) =$$

$$\frac{(1-2.8)(2-3.4)+(3-2.8)(4-3.4)+(1-2.8)(3-3.4)+(5-2.8)(5-3.4)+(4-2.8)(3-3.4)}{4} = 1.6$$

- Der Schätzwert für $COV(X_1, X_2)$ ist somit 1.6

Abschließende Bemerkung

- Wir werden uns in den nächsten Vorlesungen ausschließlich mit den Itemantworten von zufällig gezogenen Personen beschäftigen!
- Die Größen $X_{iPerson}$ und $\tau_{iPerson}$ werden wir erst am Ende des Semesters im Kapitel zur Einzelfalldiagnostik wieder aufgreifen

5 Minuten Pause

Teil 2:
Mathematische Grundlagen der Testtheorie

3. Axiome der klassischen Testtheorie

3. Axiome der klassischen Testtheorie

3.1. Axiome

3.2. Folgerungen aus den Axiomen

Axiom 1: Definition der zufälligen wahren Werte

- Die Axiome beziehen sich auf Itemantworten zufällig gezogener Personen
- Das erste Axiom haben wir bereits aufgestellt
- Es besteht aus der Definition der zufälligen wahren Werte τ_i:

Axiom 1: Für jedes Item i existiert eine Zufallsvariable τ_i, deren Realisation der wahre Wert $\tau_{iPerson}$ der Itemantwort der zufällig gezogenen Person ist. (D1)

- Die mathematisch exakte Formulierung dieses Axioms (also die mathematisch exakte Definition von τ_i) ist sehr kompliziert. Wir belassen es daher bei dieser Formulierung.

Axiom 2: Definition der Fehlervariablen

- Das zweite Axiom besteht aus der Definition der Fehlervariablen ε_i :

Axiom 2: Für jedes Item i existiert eine Fehlervariable ε_i, die eine Zufallsvariable ist und wie folgt definiert ist: (D2)

$$\boldsymbol{\varepsilon_i = X_i - \tau_i}$$

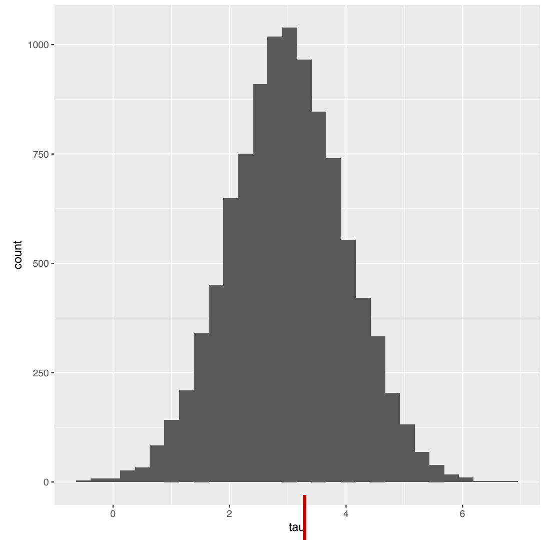
- Die Fehlervariable ist somit eine Zufallsvariable, die für die Abweichung zwischen zufälligem wahrem Wert τ_i und der Itemantwort X_i auf Item i steht
- Falls sich im „doppelten" Zufallsexperiment der zufällige wahre Wert eines Items i in einem Wert $\tau_{iPerson}$ realisiert und die tatsächliche Itemantwort in dem Wert x_i, dann realisiert sich die Fehlervariable auf diesem Item in dem Wert $x_i - \tau_{iPerson}$

Grafische Veranschaulichung: Fehlervariable ε_i

$$x_i - \tau_{iPerson} = 2 - 3.7 = -1.7$$

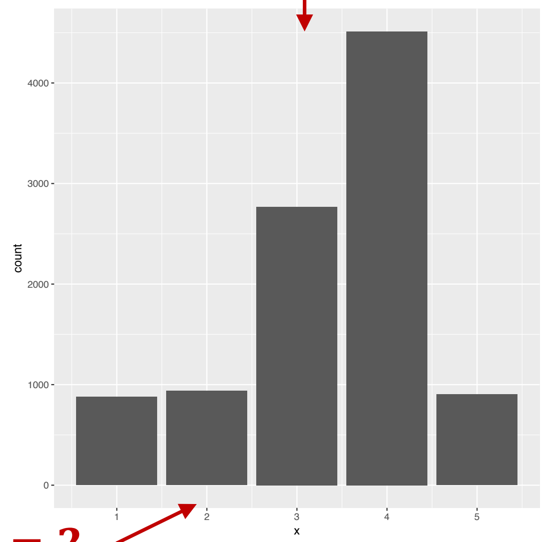
Die Fehlervariable hat sich somit in dem Wert -1.7 realisiert.

X_i



τ_i

$\tau_{iPerson} = 3.7$



$X_{iPerson}$

$x_i = 2$

Zusammenfassung der Axiome

- D1: Für jedes Item i ist τ_i die Zufallsvariable, deren Realisation der wahre Wert $\tau_{iPerson}$ der Itemantwort der zufällig gezogenen Person ist
- D2: Für jedes Item i ist die Fehlervariable ε_i eine Zufallsvariable, die wie folgt definiert ist: $\varepsilon_i = X_i - \tau_i$

3. Axiome der klassischen Testtheorie

3.1. Axiome

3.2. Folgerungen aus den Axiomen

„Axiome“ der klassischen Testtheorie

- Obwohl es sich bei den „Axiomen“ eigentlich nur um Definitionen handelt, spricht man von „**Axiomen der klassischen Testtheorie**“
- Da es sich um Definitionen handelt, können die Axiome selbst nicht „falsch“ sein
- Es ist also z.B. nicht möglich, die Aussage $\varepsilon_i = X_i - \tau_i$ (Axiom 2) empirisch zu widerlegen, da es sich hierbei einfach um eine Definition handelt
- Aus den beiden Axiomen/Definitionen lassen sich einige wichtige Folgerungen ableiten…

Folgerungen: Itemantworten

- **Folgerung 1**: Die Itemantwort einer zufällig gezogenen Person auf ein Item ist die Summe des zufälligen wahren Wertes und der Fehlervariable dieses Items

$$X_i = \tau_i + \varepsilon_i \qquad \text{(E1)}$$

- Beweis: Umstellen von Axiom 2 (D2)

Folgerungen: Erwartungswerte I

- **Folgerung 2**: Der Erwartungswert der Fehlervariable eines Items ist 0

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad \text{(E2)}$$

- Beweis: schwierig und deshalb nicht im Anhang

Folgerungen: Erwartungswerte II

- **Folgerung 3**: Der Erwartungswert eines Items entspricht dem Erwartungswert des zufälligen wahren Wertes auf diesem Item

$$E(X_i) = E(\tau_i) \qquad \text{(E3)}$$

- Beweis im Anhang 2

Folgerungen: Kovarianzen I

- **Folgerung 4**: Die Kovarianz des zufälligen wahren Wertes eines Items mit der Fehlervariable dieses Items ist 0

$$COV(\tau_i, \varepsilon_i) = 0 \qquad \text{(E4)}$$

- Beweis: schwierig und nicht im Anhang

Folgerungen: Kovarianzen II

- **Folgerung 5**: Die Kovarianz des zufälligen wahren Wertes eines Items mit der Fehlervariable eines beliebigen anderen Items ist 0

$$COV\left(\tau_i, \varepsilon_j\right) = 0 \qquad \text{(E5)}$$

- Beweis: schwierig und nicht im Anhang

Folgerungen: Varianzen

- **Folgerung 6**: Die Varianz eines Items i entspricht der Summe der Varianzen des zufälligen wahren Werts und der Fehlervariable dieses Items

$$VAR(X_i) = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i) \qquad \text{(E6)}$$

- Beweis im Anhang 2

Zusammenfassung der Folgerungen

- E1: Die Itemantwort einer zufällig gezogenen Person auf ein Item ist die Summe des zufälligen wahren Wertes und der Fehlervariable dieses Items: $\boldsymbol{X_i = \tau_i + \varepsilon_i}$
- E2: Der Erwartungswert der Fehlervariable eines Items ist 0: $\boldsymbol{E(\varepsilon_i) = 0}$
- E3: Der Erwartungswert eines Items entspricht dem Erwartungswert des zufälligen wahren Wertes auf diesem Item: $\boldsymbol{E(X_i) = E(\tau_i)}$
- E4: Die Kovarianz des zufälligen wahren Wertes eines Items mit der Fehlervariable dieses Items ist 0: $\boldsymbol{COV(\tau_i, \varepsilon_i) = 0}$
- E5: Die Kovarianz des zufälligen wahren Wertes eines Items mit der Fehlervariable eines beliebigen anderen Item ist 0: $\boldsymbol{COV\left(\tau_i, \varepsilon_j\right) = 0}$
- E6: Die Varianz eines Items i entspricht der Summe der Varianzen des zufälligen wahren Wertes und der Fehlervariable dieses Items: $\boldsymbol{VAR(X_i) = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)}$

Warum Axiome und Folgerungen?

- Da die eben genannten Folgerungen mathematische Folgerungen aus den Axiomen sind, können auch sie nie „falsch" sein!
- Es ist also z.B. unmöglich, die Aussage $COV(\tau_i, \varepsilon_i) = 0$ (Folgerung 4) empirisch zu widerlegen, da diese Aussage mathematisch aus der Definition von τ_i und ε_i folgt
- Das hört sich zunächst gut an, aber wozu brauchen wir die Definitionen von τ_i und ε_i und die Folgerungen aus ihnen überhaupt? Wir interessieren uns doch eigentlich für latente Variablen. Mit diesen haben die τ_i und ε_i ja erst einmal gar nichts zu tun.
- Drei Gründe:
  - Wir werden die wahren Werte τ_i für einige wichtige Definitionen benötigen
  - Wir werden uns im Rahmen testtheoretischer Modelle mit dem Zusammenhang zwischen den τ_i und latenten Variablen beschäftigen
  - Mit Hilfe der Folgerungen sind viele Beweise und Ableitungen sehr viel einfacher

Das war's schon fast für heute…

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung beschäftigen wir uns genauer damit, wie die wahren Werte τ_i der Items eines psychologischen Tests im Rahmen von testtheoretischen Modellen mit den für uns eigentlich interessanten latenten Variablen zusammenhängen.

- *Aber zuerst:*
  - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
  - Zur Vertiefung:
    - Übungsblatt 2 auf Moodle
    - Bühner (2021, Kapitel 4, S. 107-117)

Anhang 1:

Rechenregeln für Zufallsvariablen

Erwartungswert - Rechenregeln

- Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und seien X, Y, X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ beliebige Zufallsvariablen
- Rechenregeln:

$$E(a) = a \qquad \text{(A2)}$$

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(X) \qquad \text{(A3)}$$

$$E(X + a) = E(X) + a \qquad \text{(A4)}$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \qquad \text{(A5)}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) \qquad \text{(A6)}$$

Varianz – Definition und Interpretation

- Definition:

$$VAR(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \quad \text{(B1)}$$

- Interpretation: Wenn man das der Zufallsvariable X zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und die Varianz (siehe Statistik I) aller Realisationen der Zufallsvariable berechnen würde, wäre dies die Varianz

Varianz – Rechenregeln

- Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und X eine beliebige Zufallsvariable
- Rechenregeln:

$$VAR(a) = 0 \qquad \text{(B2)}$$
$$VAR(X + a) = VAR(X) \qquad \text{(B3)}$$
$$VAR(a \cdot X) = a^2 \cdot VAR(X) \qquad \text{(B4)}$$

Kovarianz – Definition und Interpretation

- Definition:

$$COV(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big) \quad \text{(C1)}$$

- Interpretation: Wenn man das den Zufallsvariablen X und Y zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und die Kovarianz (siehe Statistik I) aller Realisationen der Zufallsvariablen berechnen würde, wäre dies die Kovarianz

Kovarianz – Rechenregeln

- Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige **Konstante** und seien $X, Y, Z, X_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ beliebige Zufallsvariablen
- Rechenregeln:

$$COV(X, Y) = COV(Y, X) \quad \text{(C2)}$$

$$COV(X, X) = VAR(X) \quad \text{(C3)}$$

$$COV(X, a) = 0 \quad \text{(C4)}$$

$$COV(a \cdot X, Y) = a \cdot COV(X, Y) \quad \text{(C5)}$$

$$COV(X + a, Y) = COV(X, Y) \quad \text{(C6)}$$

$$COV(X + Y, Z) = COV(X, Z) + COV(Y, Z) \quad \text{(C7)}$$

$$COV\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, Y\right) = \sum_{i=1}^{k} COV(X_i, Y) \quad \text{(C8)}$$

Varianz – weitere Rechenregeln

- Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und seien X, Y, Z, X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ beliebige Zufallsvariablen
- Weitere Rechenregeln für die Varianz:

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y) + 2 \cdot COV(X,Y) \qquad \text{(B5)}$$

das heißt, falls $COV(X,Y) = 0$:

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y) \qquad \text{(B6)}$$

und falls $COV\left(X_i, X_j\right) = 0$ für alle Zufallsvariablen-Paare $i, j\ mit\ i \neq j$:

$$VAR\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} VAR(X_i) \qquad \text{(B7)}$$

Korrelation – Definition und Interpretation

- Definition:

$$COR(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}} \qquad \text{(C9)}$$

- Interpretation: Wenn man das den Zufallsvariablen X und Y zugrundeliegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und die Korrelation (siehe Statistik I) aller Realisationen der Zufallsvariablen berechnen würde, wäre dies die Korrelation

Anhang 2:

Herleitung der Folgerungen 3 und 6

Folgerung 3: Erwartungswerte

- Der Erwartungswert eines Items entspricht dem Erwartungswert des zufälligen wahren Wertes auf diesem Item:

$$E(X_i) = E(\tau_i) \qquad \text{(E3)}$$

- Beweis: Folgerung E1, Rechenregel für Erwartungswerte A5, Folgerung E2

$$E(X_i) = E(\tau_i + \varepsilon_i) = E(\tau_i) + E(\varepsilon_i) = E(\tau_i) + 0 = E(\tau_i)$$

(E1) $X_i = \tau_i + \varepsilon_i$

(A5) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

(E2) $E(\varepsilon_i)$=0

Folgerung 6: Varianzen

- Die Varianz eines Items i entspricht der Summe der Varianzen (VAR) des zufälligen wahren Wertes τ_i und der Fehlervariable ε_i dieses Items

$$VAR(X_i) = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i) \qquad \text{(E6)}$$

- Beweis: Folgerung E1, Folgerung E4 und Varianzrechenregel B6

$$VAR(X_i) = VAR(\tau_i + \varepsilon_i) = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i) + 2*COV(\tau_i, \varepsilon_i) =$$

$$\text{(E1)} \quad X_i = \tau_i + \varepsilon_i$$

$$\text{(E4)} \quad COV(\tau_i, \varepsilon_i) = 0$$

$$\text{(B6)} \quad VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y) + 2 \cdot COV(X, Y)$$

$$= VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i) + 0 = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)$$